

Analiza reakcji wybranych modeli długookresowego wzrostu gospodarczego na szoki stochastyczne

Jakub Mućk*

Nadesłany: 7 listopada 2011 r. Zaakceptowany: 6 czerwca 2012 r.

Streszczenie

Celem artykułu jest włączenie szoków stochastycznych do wybranych modeli długookresowego wzrostu gospodarczego oraz identyfikacja kierunku i siły reakcji na te szoki najważniejszych zmiennych tych modeli. Badanie objęło modele Ramseya, Cassa i Koopmansa, Uzawy i Lucasa oraz Jonesa. Uwzględnione zostały przy tym szoki stochastyczne dwojakiego rodzaju. Pierwsze z nich to zaburzenia zwiększające całkowitą produktywność czynników produkcji (TFP), czyli standardowe szoki technologiczne. W przypadku modeli Uzawy i Lucasa oraz Jonesa wprowadzone zostały ponadto szoki stochastyczne oddziałujące, odpowiednio, na akumulację kapitału ludzkiego oraz tempo postępu technologicznego. Cel badania został zrealizowany dwuetapowo. Na pierwszym etapie dla postaci centralnego planisty każdego z analizowanych modeli zostały obliczone wartości funkcji reakcji na impuls. Druga część badania to porównanie otrzymanych symulacji z danymi empirycznymi opisującymi Stany Zjednoczone.

Słowa kluczowe: DSGE, endogeniczny wzrost gospodarczy, semiendogeniczny wzrost gospodarczy

JEL: C63, O41

* Narodowy Bank Polski, Instytut Ekonomiczny; Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Instytut Ekonometrii;
e-mail: jakub.muck@nbp.pl.

1. Wstęp

Począwszy od pracy Solowa (1956) w badaniach makroekonomicznych zaczęto skupiać się na konstruowaniu modeli długookresowego wzrostu gospodarczego. Deterministyczny charakter tych konstrukcji umożliwia analityczne określenie własności dynamicznych oraz identyfikację źródeł wzrostu gospodarczego w zależności od przyjętych założeń i postaci zagregowanej funkcji produkcji. W literaturze można spotkać kilka klas modeli, które w różny sposób pozwalają wytłumaczyć zjawisko długookresowego wzrostu gospodarczego. Na początku rozwoju tej dziedziny był on rozważany jako *stricte* egzogeniczne zjawisko związane z akumulacją postępu technologicznego, który również uznawano za zmienną egzogeniczną. Punktem wyjścia jest tutaj model Ramseya (1928), który został rozszerzony przez Cassa (1965) i Koopmansa (1965). Drugim podejściem są modele endogenicznego wzrostu, które źródła wzrostu gospodarczego upatrują w występowaniu akumulacji specyficznych czynników wytwórczych. Główne konstrukcje uwzględniają kapitał ludzki (Uzawa 1964; Lucas 1988) i akumulację wiedzy, czyli endogeniczny postęp technologiczny (Romer 1990; Aghion, Howitt 1992). Ostatnią klasą modeli są te, które uwzględniają semiendogeniczny charakter tego zjawiska. W tym przypadku długookresowy wzrost gospodarczy, rozumiany jako wzrost zmiennych modelu w ujęciu *per capita*, zależy od zwiększania się egzogenicznych wielkości, np. zasobu pracy. Ważna konstrukcja dla tej klasy, zaproponowana przez Jonesa (1995), w specyfikacji uwzględnia sektor badań i rozwoju (R+D, ang. *research and development*).

Bardzo popularną ścieżką badawczą w badaniach makroekonomicznych jest metodologia DSGE (ang. *dynamic stochastic general equilibrium*). Od czasów publikacji Kydlanda i Prescottta (1982) zaczęto się skupiać na zagadnieniu wahań gospodarczych. Metodologia ta różni się od modeli wzrostu gospodarczego tym, że uwzględnia losowe zaburzenia zmiennych makroekonomicznych i pozwala na modelowanie krótkookresowych oscylacji gospodarczych, a punktem wyjścia w konstruowaniu modeli teoretycznych jest model Ramseya (Heer, Maussner 2005). Większość badań z tego zakresu pomija jednak mechanizmy wzrostu gospodarczego i skupia się na analizie determinant krótkookresowych fluktuacji. Można wyróżnić dwa główne nurty tych analiz (Novalez, Fernandez, Ruiz 2009). Pierwszy z nich, modelowanie realnego cyklu koniunkturalnego (RBC, ang. *real business cycle*), charakteryzuje się wykorzystywaniem założeń równowagi ogólnej. Drugi nurt to podejście neokeynesowskie, które uwzględnia również sztywność cen i płac. Popularność DSGE wynika głównie z trafnego odwzorowania koniunkturalnych wahań podstawowych zmiennych ekonomicznych.

Dzięki połączeniu obu podejść można jednocześnie uwzględnić długookresowe mechanizmy wzrostu gospodarczego oraz krótkookresowe wahania gospodarcze. Pozwoli to m.in. wytłumaczyć zmienność wielkości makroekonomicznych o częstotliwości zarówno koniunkturalnej, jak i średniookresowej (Comin, Gertler 2006; Gradzewicz 2008). Łącząc te obszary, można otrzymać ciekawy zbiór narzędzi, który ułatwi ocenę zgodności wskazywanych w literaturze źródeł długookresowego wzrostu gospodarczego z obserwacjami empirycznymi. W artykule omówione zostanie w szczególności, które z krótkookresowych wahań głównych zmiennych modelu są wywoływane endogenicznie przez mechanizmy dynamiczne w wybranych modelach wzrostu.

Celem artykułu jest identyfikacja kierunku i siły reakcji najważniejszych zmiennych modeli wzrostu gospodarczego na szoki stochastyczne i różnic między tymi reakcjami. Tak postawiony cel będzie osiągnięty przez wprowadzenie do wybranych modeli zaburzeń stochastycznych. Na podstawie danych empirycznych przeanalizowane zostanie również, które z rozważanych konstrukcji

pozwalają na dokładniejsze odwzorowanie przebiegu wahań cyklicznych w Stanach Zjednoczonych. W tym celu zostanie wykorzystane standardowe podejście stosowane w DSGE, a dokładniej RBC, znane z teorii wzrostu. Wnioski płynące z badania posłużą do odpowiedzi na pytanie, który z rozważanych modeli lepiej odwzorowuje wahania gospodarcze w gospodarce amerykańskiej. Czy jest to standardowy model RBC oparty na modelu Ramseya? Czy może jego wersja rozszerzona o sektor badawczy lub edukacyjny? Dodatkowe mechanizmy fluktuacji stochastycznych, uwzględnione w modelach długookresowego wzrostu opartego na kreacji wiedzy w sektorze badań i rozwoju bądź akumulację wiedzy, są bowiem uzupełnieniem podstawowych mechanizmów znanych z modeli realnego cyklu koniunkturalnego.

Badaniem objęte zostaną główne modele poszczególnych klas długookresowego wzrostu: Ramseya (1928), Cassa (1965) i Koopmansa (1965), Uzawy (1965) i Lucasa (1988) oraz Jonesa (1995). Cel badania zostanie osiągnięty dwuetapowo. Na pierwszym etapie dla postaci „centralnego planisty” w każdym z rozważanych modeli zostaną obliczone wartości funkcji reakcji na impuls. Przedmiotem analizy będzie wpływ bodźca będącego zaburzeniem stochastycznym zwiększającego łączną produktywność czynników TFP (ang. *total factor productivity*) oraz wpływającego na technologię w modelu Jonesa i kapitał ludzki w modelu Uzawy i Lucasa. Będzie to punktem wyjścia drugiej części badania, czyli porównania otrzymanych symulacji z danymi empirycznymi opisującymi Stany Zjednoczone. Szeregi czasowe, zarówno obserwacji makroekonomicznych gospodarki amerykańskiej, jak i wyników symulacji dla modeli Ramseya, Uzawy i Lucasa oraz Jonesa po wystąpieniu szoku technologicznego, zostaną zdekomponowane za pomocą filtra Hodricka i Prescottta (1997). Na koniec analizie porównawczej zostanie poddana autokorelacja i korelacje krzyżowe składnika cyklicznego dla podstawowych zmiennych modeli, czyli produktu, konsumpcji oraz kapitału fizycznego.

W literaturze przedmiotu brakuje studium porównującego własności cykliczne standardowych modeli długookresowego wzrostu w paśmie wahań koniunkturalnych. Wykorzystane w niniejszym artykule mechanizmy propagacji szoków stochastycznych będą zgodne ze standardowym podejściem w metodologii DSGE. Wprowadzone zaburzenia będą dotyczyły zarówno w łącznej produktywności czynników produkcji TFP, jak i niewytwórczych gałęzi gospodarki, czyli sektora edukacyjnego w modelu Uzawy i Lucasa oraz badań i rozwoju w modelu Jonesa. Wnioski z przeprowadzonego badania posłużą także do skonstruowania modeli gospodarek na potrzeby analizy fluktuacji w średnim okresie, ponieważ wahania koniunkturalne stanowią stosunkowo dużą część zmienności wielkości makroekonomicznych w średnim okresie (Comin, Gertler 2006).

Struktura artykułu jest następująca. W pierwszej części omówione zostaną modele wzrostu gospodarczego Ramseya, Uzawy i Lucasa oraz Jonesa. Druga część będzie zawierać opis narzędzi dynamicznej optymalizacji i metod numerycznych, wykorzystanych w przeprowadzonym badaniu. W trzecim rozdziale zostaną szczegółowo opisane założenia kalibracji oraz wyniki przeprowadzonego badania. Ponadto własności cykliczne otrzymanych szeregów czasowych konsumpcji, kapitału fizycznego oraz produktu skonfrontowane będą z obserwacjami empirycznymi dla Stanów Zjednoczonych.

2. Wybrane modele wzrostu gospodarczego

W prezentacji modeli wzrostu gospodarczego wykorzystano zbiór założeń, który jest wspólny dla wszystkich rozważanych konstrukcji. Po pierwsze, czas w konstrukcjach jest zmienną dyskretną.

Po drugie, modele przedstawiono z punktu widzenia tzw. centralnego planisty (ang. *social planner*). W modelach nie uwzględniono podziału gospodarki na gospodarstwa domowe i sektor wytwórczy. Ponadto z analizy wyłączono działalność państwa oraz międzynarodową wymianę handlową (Novales, Fernandez, Ruiz 2009). Ograniczenie się do podstawowych zmiennych makroekonomicznych pozwala na zestawienie modeli o zupełnie odmiennych mechanizmach wzrostu gospodarczego. Po trzecie, w każdym modelu został uwzględniony wzrost zasobu pracy dostępnego w gospodarce. Liczba osób pracujących, czyli zasób pracy, rośnie wykładniczo według stałej egzogenicznej stopy wzrostu n . Dynamikę tę opisuje równanie (1):

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t \quad (1)$$

gdzie L_t oznacza ogólny zasób pracy w momencie t (Barro, Sala-i-Martin 1995).

Kolejny zestaw założeń dotyczy użyteczności. W modelach użyto funkcji o stałej relatywnej awersji do ryzyka CRRA (ang. *constant relative risk aversion*):

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \quad (2)$$

Funkcja użyteczności jest rosnąca. Komentarza wymaga przypadek, gdy współczynnik θ jest bliski jedności. Wtedy, zgodnie z regułą de'Hospitala, funkcja użyteczności asymptotycznie dąży do postaci logarytmu naturalnego. Interpretacja parametru θ jest związana z pomiarem awersji do ryzyka. Korzystając z miary relatywnego ryzyka Arrowa i Pratta RRA (ang. *relative risk aversion*) (Pratt 1964), która jest ilorazem drugiej pochodnej przez pierwszą pochodną, wziętą ze znakiem minus, można stwierdzić, że wielkość ta nie zależy od wielkości konsumpcji, a więc też od czasu, i jest równa parametrowi θ . Ponadto miara relatywnego ryzyka Arrowa i Pratta jest w tym przypadku równa elastyczności krańcowej użyteczności. Co więcej, odwrotność powyższego wyrażenia jest ekwiwalentna wobec międzyokresowej elastyczności substytucji (Barro, Sala-i-Martin 1995).

2.1. Model egzogenicznego wzrostu Ramseya, Cassa i Koopmansa

Przegląd modeli długookresowego wzrostu gospodarczego zostanie rozpoczęty od konstrukcji zaproponowanej przez Ramseya (1928), a następnie rozwiniętej przez Cassa (1965) i Koopmansa (1965)¹. W modelu tym podstawowym zagadnieniem jest maksymalizacja użyteczności konsumpcji w nieskończonym horyzoncie czasowym:

$$\max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (3)$$

Parametr β jest utożsamiany ze stopą dyskontową, a więc ceną, za jaką reprezentatywna jednostka jest w stanie przenieść „dzisiejszą” konsumpcję na „jutro”. Na podstawie wzoru (3) można stwierdzić, że problem optymalizacyjny jest rozważany w nieskończonym horyzoncie czasowym.

¹ W dalszej części artykułu model ten będzie nazywany modelem Ramseya.

W podstawowym modelu przyjmuje się, że stopa wzrostu ludności n jest egzogeniczna. Poziom wiedzy A jest pewną wartością stałą w czasie, która określa funkcję produkcji danej gospodarki. Alternatywnie można przyjąć, że poziom technologiczny wzrasta zgodnie z egzogeniczną stopą g (Barro, Sala-i-Martin 1995). Zmienna ta będzie opisywać łączną produktywność czynników wytwórczych TFP:

$$A_{t+1} = A_t(1 + g) \quad (4)$$

W przypadku $g > 0$, szok technologiczny, opisany dalej jako $\eta_{1,t}$, wprowadzałby nieoczekiwaną zmianę tempa postępu technicznego w gospodarce, a w konsekwencji tempa wzrostu produktu, odchylając go od poziomu ustalonego na ścieżce zrównoważonego wzrostu.

Proces produkcji zostanie opisany za pomocą funkcji Cobba i Douglasa. Zagregowany produkt Y_t w momencie t jest funkcją kapitału fizycznego K_t oraz zasobu pracy L_t i poziomu technologicznego A_t (5). Skutkiem procesu wytwórczego jest pewna ilość homogenicznego dobra. W zaproponowanej specyfikacji występuje też składnik odpowiedzialny za szoki stochastyczne, czyli $\eta_{1,t}$, który w tej części artykułu został uznany za stały i równy jedności².

$$Y_t = \eta_{1,t} K_t^\alpha (L_t A_t)^\gamma \quad (5)$$

Wartości parametrów α i γ determinują charakter procesu produkcyjnego. W przypadku gdy ich suma jest większa od jedności, funkcja produkcji charakteryzuje się korzyściami skali. Z kolei w modelu z malejącymi przychodami względem skali założono, że $\alpha + \gamma < 1$. Przypadek graniczny, gdy $\alpha + \gamma = 1$, jest tożsamy z występowaniem stałych korzyści względem wolumenu produktu i ten wariant zostanie wykorzystany w dalszej analizie.

Kolejnym krokiem jest wprowadzenie zmiennych modelu w ujęciu *per capita*, co pozwoli na sformułowanie skoncentrowanej funkcji produkcji. W formule opisującej proces wytwórczy (5) została wykorzystana neutralność w sensie Hicksa. Dzięki temu produkt i kapitał, odpowiednio y_t oraz k_t , mogą zostać opisane jako wartości zmiennych zagregowanych przeliczonych na jednostkę efektywnej pracy³.

W przyjętej specyfikacji skoncentrowanej funkcji produkcji produkt y_t zależy jedynie od wielkości kapitału fizycznego przypadającego na jednostkę pracy k_t oraz czynnika stochastycznego $\eta_{1,t}$:

$$y_t = \eta_{1,t} k_t^\alpha \quad (6)$$

Wytworzony w okresie t produkt może zostać przeznaczony na konsumpcję c_t lub oszczędności s_t . Z kolei czynnik $\eta_{1,t}$, kwantyfikujący zaburzenia technologiczne, jest kształtowany przez proces autoregresyjny pierwszego stopnia o parametrze ϕ_1 ⁴. W podstawowym modelu Ramseya zakłada się, że cały wolumen oszczędności przeznaczany jest na inwestycje i_t :

$$y_t = s_t + c_t = i_t + c_t \quad (7)$$

² Założenie to dotyczy wszystkich modeli będących przedmiotem analizy. Przegląd literatury opiera się na *stricte* deterministycznych konstrukcjach.

³ W przypadku, gdy $g = 0$, powyższy zabieg sprowadza się do wyrażenia zmiennych modelu w ujęciu *per capita*.

⁴ Szoki technologiczne w pozostałych modelach będą się cechować takim samym mechanizmem propagacji.

Uzupełnienia wymaga opis dynamiki kapitału fizycznego przypadającego na efektywną jednostkę pracy. Wartość tej zmiennej w momencie $t+1$ jest równa inwestycjom w poprzednim okresie i_t , pomniejszonym o deprecjację. Amortyzację kapitału fizycznego determinuje stała w czasie i egzogeniczna stopa δ , która zmniejsza dotychczas zakumulowaną wielkość tego czynnika wytwórczego. Ostatecznie dynamika tej zmiennej jest skorygowana o wzrost zasobu pracy n oraz egzogeniczny postęp technologiczny g :

$$(1 + n + g)k_{t+1} = i_t - \delta k_t = (1 - \delta)k_t + \eta_{1,t} A k_t^\alpha - c_t \quad (8)$$

Stan ustalony modelu⁵, a więc kombinacja wartości zmiennych modelu powodująca, że wartości zmiennych modelu w kolejnych okresach się nie zmieniają, może zostać określony dla kapitału oraz konsumpcji w przeliczeniu na efektywną jednostkę pracy (9). Oznacza to, że poziom konsumpcji w każdym okresie jest taki sam i wynosi \bar{c} . Wzrost gospodarczy, rozumiany jako zwiększanie się zmiennych w ujęciu *per capita*, jest natomiast możliwy jedynie w przypadku, gdy egzogeniczna stopa wzrostu g jest dodatnia. Wartości konsumpcji \bar{c} , kapitału fizycznego \bar{k} oraz produktu \bar{y} są determinowane wyłącznie przez parametry modelu. Całkowite inwestycje są równe skutkom procesów zmniejszających kapitał fizyczny, a więc deprecjację, postęp technologiczny oraz przyrost zasobu pracy.

$$\begin{cases} \bar{k} = \left(\frac{1 + n + g - \beta(1 - \delta)}{\alpha\beta A} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \bar{c} = \left(\frac{1 + n + g - \beta(1 - \delta)}{\alpha\beta A} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (n + g + \delta) \left(\frac{1 + n + g - \beta(1 - \delta)}{\alpha\beta A} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \bar{\eta} = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Powyżej opisany model stanowi zaledwie punkt wyjścia do skonstruowania bardziej zaawansowanych mechanizmów objaśniających wzrost gospodarczy.

2.2. Model endogenicznego wzrostu Uzawy i Lucasa

Uzawa (1964) wprowadził rozszerzenie standardowego modelu o kapitał ludzki h_t . Reprezentatywny agent oprócz poziomu konsumpcji wybiera u_t , czyli czas poświęcony na pracę. Zmienna u_t oznacza odsetek czasu poświęcanego pracy i przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$. Wyrażenie $1 - u_t$ oznacza natomiast odsetek czasu przeznaczanego przez reprezentatywnego agenta na nabywanie umiejętności i naukę, czyli akumulację kapitału ludzkiego. Dla uproszczenia przyjęto, że czas poświęcony na pracę nie wpływa na poziom użyteczności osiąganą przez reprezentatywną jednost-

⁵ Pojęcie stanu stacjonarnego będzie używane zamiennie ze stanem ustalonym.

kę. Podstawowy problem w ujęciu matematycznym jest taki sam jak w przypadku modelu Ramseya i sprowadza się do maksymalizacji bieżącej wartości konsumpcji osiągananej w horyzoncie nieskończonym z tą różnicą, że zmiennymi decyzyjnymi są c_t oraz u_t :

$$\max_{c_t, u_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (10)$$

Istotnym rozszerzeniem, w porównaniu z modelem Ramseya, jest wprowadzenie dodatkowego czynnika produkcji h_t , którego akumulacja charakteryzuje się odpowiednią konstrukcją. Kapitał ludzki jest bowiem rozumiany jako ogólny poziom umiejętności i kwalifikacji pracowników zatrudnionych w procesie produkcyjnym. Na dynamikę h_t będą wpływać dwie wielkości (11). Pierwsza z nich to dotychczas zakumulowana wartość kapitału ludzkiego; druga to czas poświęcany na działalność produkcyjną.

$$h_{t+1} = \eta_{2,t} h_t B(1 - u_t) + (1 - \delta_t) h_t \quad (11)$$

Tak skonstruowany proces akumulacji h_t różni się od zaproponowanej przez Uzawę (1964) czy Lucasa (1988). Uwzględniono w niej deprecjację kapitału ludzkiego, co postulowali Mankiw, Romer i Weil (1992). Gdy reprezentatywny agent cały zasób czasu poświęca pracy, czyli $u_t = 1$, kapitał ludzki deprecjonuje się o pewną stałą w czasie i egzogeniczną stopę deprecjacji δ_h . Z drugiej strony gdy reprezentatywny agent w ogóle nie zajmuje się działalnością wytwórczą, czyli $u_t = 0$, akumulacja kapitału ludzkiego jest najszybsza i odpowiada stałej B pomniejszonej o δ_h . Najważniejszą własnością jest tutaj liniowość funkcji kreujującej kapitał ludzki, szczególnie części określającej proces wytwórczy tego zasobu, czyli $h_t B(1 - u_t)$. Gdy wielkość ta jest wyższa od deprecjacji kapitału ludzkiego, w modelu Uzawy i Lucasa pojawia się endogeniczny wzrost, którego źródłem jest akumulacja tego czynnika produkcji. Komentarza wymaga też sposób wprowadzenia szoku stochastycznego do równania ruchu kapitału ludzkiego. Powoduje ono nieantycypowane zwiększenie efektywności sektora edukacyjnego. Mechanizm propagacji szoku zwiększającego efektywność akumulacji kapitału ludzkiego jest procesem AR(1) o współczynniku ϕ_2 .

Zmienia się też specyfikacja funkcji produkcji. Zbiór czynników zostaje powiększony o kapitał ludzki h_t oraz czas poświęcany działalności produkcyjnej u_t . Ich elastyczności względem produktu wynoszą $1 - \alpha$. Dodatkowo do modelu może być wprowadzony kapitał ludzki, co postulował np. Lucas (1988). Wtedy wykładnik kapitału ludzkiego w funkcji produkcji jest powiększony o wartość parametru γ . W tej sytuacji wprowadzone zostają efekty skali akumulacji kapitału ludzkiego. Zabieg ten jest uzasadniony m.in. potrzebą uwzględnienia procesów zwiększających kapitał ludzki podczas działalności wytwórczej, np. *learning by doing* (Klenow, Rodriguez-Clare 2004):

$$y_t = \eta_{1,t} A k_t^\alpha u_t^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha+\gamma} \quad (12)$$

Model jest uzupełniony równaniem ruchu kapitału *per capita*. Na dynamikę tej zmiennej ekonomicznej wpływa wartość inwestycji oraz jej deprecjacja i tempo wzrostu zasobu pracy (13). Inwestycje, podobnie jak w modelu Ramseya, stanowią różnicę pomiędzy produktem a konsumpcją. Amortyzacja kapitału fizycznego oraz tempo wzrostu zasobu pracy są egzogeniczne.

$$(1 + n)k_{t+1} = (1 - \delta_k)k_t + \eta_{1,t} A k_t^\alpha u_t^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha+\gamma} - c_t \quad (13)$$

Przedstawienie zmiennych zagregowanych modelu Uzawy i Lucasa w ujęciu *per capita* nie wystarczy, by określić stan stacjonarny modelu o pożądanych własnościach. Będzie nim zatem BGP – ścieżka zrównoważonego wzrostu (ang. *balanced growth path*) dla kapitału fizycznego, ludzkiego, konsumpcji oraz stała wartość u_t .

Arbitralna specyfikacja funkcji produkcji, zakładająca, że parametr γ jest równy zero, czyli przypadek, gdy procesowi wytwórczemu nie towarzyszy dodatkowa akumulacja kapitału ludzkiego, pozwala wyznaczyć stan stacjonarny modelu pomimo braku wypukłości funkcji produkcji (Hiraguchi 2009). Tempo wzrostu konsumpcji, kapitału i produktu zależy wówczas jedynie od parametrów opisujących procesy akumulacji kapitału ludzkiego oraz maksymalizacji bieżącej wartości konsumpcji:

$$g = [\beta(B + 1 - \delta_h)]^{\frac{1}{\theta}} \quad (14)$$

Stan ustalony będzie się zatem charakteryzował stałymi proporcjami pomiędzy zmiennymi, które wykazują trend długookresowy determinowany stopą wzrostu g . Tempo wzrostu wielkości modelu g zależy od parametrów równania ruchu kapitału ludzkiego (11). Korzystając z przyjętej powyżej postaci modelu Uzawy i Lukasa, można określić dokładne wartości w stanie stacjonarnym dla u_t i nowych dwóch zmiennych: x_t oraz z_t . Pierwsza z nich oznacza stosunek kapitału fizycznego do ludzkiego, a druga – konsumpcji do kapitału fizycznego:

$$\bar{u} = 1 - \frac{g + \delta_k}{B}$$

$$\bar{z} = \left[\frac{\frac{(1+n)(1+g)^\theta}{\beta} - (1-\delta_k)}{A\alpha\bar{u}^{1-\alpha}} \right] \quad (15)$$

$$\bar{x} = A\bar{z}^{\alpha-1}\bar{u}^{1-\alpha} + (1-\delta_k) - (1+n)(1+g)$$

Tak jak w modelu Ramseya stan stacjonarny ma tutaj charakter punktu siodłowego. Oznacza to, że po uwzględnieniu warunków transversalności optymalnym zbiorem zmiennych decyzyjnych modelu jest ścieżka siodłowa, która pozwala na stopniową zbieżność do stanu ustalonego (Barro, Sala-i-Martin 1995).

Według koncepcji zaproponowanej przez Uzawę i rozwiniętej przez Lucasa źródłem wzrostu gospodarczego jest akumulacja kapitału ludzkiego. W modelu tym tempo wzrostu zmiennych ekonomicznych zależy od parametrów związanych z dynamiką kapitału ludzkiego. Wzrost gospodarczy jest zatem zjawiskiem endogenicznym.

2.3. Model semiendogenicznego wzrostu Jonesa

W modelu Jonesa (1995) wprowadzono heterogeniczny zasób pracy (16). Różnorodność ta wiąże się z podziałem siły roboczej na zatrudnionych w sektorze badań i rozwoju $L_{A,t}$ oraz zaangażowanych w działalność wytwórczą $L_{y,t}$:

$$L_t = L_{y,t} + L_{A,t} \quad (16)$$

W dalszej analizie modelu wprowadzono odsetek czasu poświęcanego na działalność w jednym z dwóch sektorów gospodarki (17). W ten sposób reprezentatywna jednostka będzie decydować, ile czasu przeznaczy na działalność badawczą, a ile na wytwórczą. Niech $l_{A,t}$ oznacza część zasobu pracy przeznaczoną na badania i rozwój, a $l_{y,t}$ – na produkcję⁶:

$$l_{y,t} + l_{A,t} = 1 \quad (17)$$

Wytwarzanie produktu w gospodarce y_t jest opisane funkcją produkcji Cobba i Douglasa. Oprócz kapitału k czynnikami produkcji są: poziom technologiczny A_t oraz odsetek czasu przeznaczanego na działalność wytwórczą $l_{y,t}$ zgodnie z poniższą formułą:

$$y_t = \eta_{1,t} B k_t^\alpha (A_t l_{y,t})^{1-\alpha} = \eta_{1,t} B k_t^\alpha (A_t (1 - l_{A,t}))^{1-\alpha} \quad (18)$$

Specyfikacja procesu produkcyjnego umożliwia zapisanie równania ruchu kapitału fizycznego *per capita*. Tak jak w modelach Ramseya oraz Uzawy i Lucasa wielkość tego czynnika w okresie $t + 1$ odpowiada wartości w momencie t , pomniejszonej o deprecjację i wzrost zasobu pracy oraz powiększonej o inwestycje:

$$(1 + n)k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + \eta_{1,t} B k_t^\alpha (A_t (1 - l_{A,t}))^{1-\alpha} - c_t \quad (19)$$

Ostatnim elementem układu dynamicznego ilustrującego model jest równanie opisujące zmianę poziomu technologicznego (20). Na wielkość poziomu technologicznego wpływają: dotychczas osiągnięta wiedza A_t , wolumen siły roboczej zatrudnionej w sektorze badań $L_{A,t}$ oraz element odpowiedzialny za propagację szoków stochastycznych $\eta_{3,t}$, którego kształtowanie będzie podlegać procesowi AR(1) o współczynniku ϕ_3 :

$$A_{t+1} = \eta_{3,t} D A_t^\phi L_{A,t}^\mu + A_t = \eta_{3,t} D A_t^\phi l_{A,t}^\mu L_t^\mu + A_t \quad (20)$$

Równanie ruchu technologii jest nieliniowe. Komentarza wymagają wartości parametrów ϕ oraz μ . Gdy wartości obu tych parametrów są równe jedności, model sprowadza się do postaci postulowanej przez Romera (1990), Grossmana i Helpmana (Klenow, Rodriguez-Clare 2004) oraz Aghion i Howitta (1992). Modele te nie opisują jednak właściwie sektora badań i rozwoju w ujęciu empirycznym (Jones 2005).

Wpływ bieżącego poziomu postępu technologicznego na dynamikę tej zmiennej zależy od wartości parametru ϕ . Jeśli współczynnik ϕ jest równy zero, tempo wzrostu wiedzy nie zależy od poziomu dotychczas osiągniętej technologii. Z kolei, gdy parametr ϕ jest ujemny, to w postaci równania postępu technologicznego przyjmujemy, że sektor badań i rozwoju charakteryzuje się malejącymi przychodami względem skali. Można to łączyć ze zjawiskiem *fishing-out*, które polega na spadku stopy wzrostu produktu przy jednoczesnym wzroście produktywności czynników wytwórczych. Jeśli wartość współczynnika ϕ jest większa od zera, procesowi akumulacji wiedzy towarzyszą pozytywne efekty zewnętrzne (Jones 2005).

⁶ Zabieg ten pozwoli na analizę zmiennych *per capita* modelu.

Drugim czynnikiem wpływającym na postęp technologiczny jest zasób pracy przeznaczony na działalność badawczo-rozwojową. Kierunek wpływu jest określany przez parametr μ . Brak zależności tempa akumulacji postępu technologicznego od zasobu pracy w sektorze badań i rozwoju uzyskujemy, gdy μ jest równe zero. Dlatego w modelu zakłada się, że wartości μ należą do przedziału (0,1). Dodatnia wartość będzie świadczyć o pozytywnym wpływie wolumenu zatrudnienia w sektorze R+D na dynamikę akumulacji wiedzy. Graniczny przypadek, w którym parametr jest równy jedności, oznacza sytuację, w której zwiększenie zasobu pracy w sektorze badań i rozwoju jest wprost proporcjonalne do dynamiki poziomu postępu technologicznego (Jones 1995).

W modelu przyjmuje się jednak, że współczynnik μ ma wartość niższą od jedności. Dane empiryczne z ostatnich 25, a nawet 100 lat pokazują, że liczba osób zatrudnionych w sektorze badawczym znacznie wzrosła od tego czasu. Z kolei stopa wzrostu produktu była wartością stałą.

Nieliniowość funkcji kreującej wiedzę względem A_t sprawia, że w modelu nie występuje w pełni endogeniczny wzrost, którego ostatecznym źródłem jest akumulacja A_t , lecz do uzyskania trwałego wzrostu y_t niezbędny jest przyrost naturalny, a więc dodatnia wartość n . Ten zaś, dzięki sektorowi B+R, przekłada się na wzrost, gdyż wiedza nie jest czynnikiem produkcji, który podlega standardowym mechanizmom rynkowym. Dzięki niej możliwe jest wykorzystanie rosnących korzyści skali (Romer 1990). Szok technologiczny $\eta_{3,t}$ w równaniu (20) będzie odnosił się do nieantycypowanej zmiany tempa postępu technologicznego (efektywności sektora B+R) w gospodarce, a w konsekwencji do tempa wzrostu produktu, odchylając go od poziomu opisującego BGP.

W modelu Jonesa stan ustalony stanowi ścieżkę zrównoważonego wzrostu BGP dla zmiennych występujących w modelu. Tempo wzrostu wszystkich zmiennych jest jednakowe (21). Co więcej, stopa wzrostu jest funkcją egzogenicznej stopy wzrostu siły roboczej oraz parametrów ϕ oraz μ .

$$g = (1+n)^{\frac{\mu}{1-\phi}} - 1 \quad (21)$$

Stopę wzrostu w gospodarce można opisać jako rosnącą funkcję współczynników μ i ϕ oraz tempa wzrostu zasobu pracy.

Pozbawienie trendu zmiennych w modelu pozwala określić, jaki odsetek czasu poświęcany jest na działalność badawczo-rozwojową, czyli \bar{l}_A (21). Dodatkowo można wyznaczyć wielkości pozostałych zmiennych układu, tj. iloraz konsumpcji do kapitału fizycznego z_t oraz kapitału fizycznego do poziomu technologicznego x_t i zmiennej w_t odpowiadającej wyrażeniu $A_t^{\phi-1} L_{A,t}^{\mu}$:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{g}{D} \\ \bar{l}_A &= \left(1 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{(1+g)^\theta - \beta}{\beta g} - \phi \right) \right)^{-1} \\ \bar{x} &= \frac{(1+n)(1+g)^\theta - 1 + \delta}{(\beta\alpha(1-\bar{l}_A)^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\bar{z} = (1+g)(1+n) - (1+\delta) + B(1-\bar{l}_A)^{1-\alpha} \bar{x}^{\alpha-1}$$

Podobnie jak w przypadku poprzednich modeli stan ustalony jest tu punktem siodłowym układu dynamicznego. Zważywszy na warunki transversalności rozwiązaniem optymalnym jest zatem ścieżka siodłowa zapewniająca stopniową zbieżność do stanu stacjonarnego modelu (Arnold 2006).

Konstrukcja zaproponowana przez Jonesa często jest opisywana jako model semiendogenicznego wzrostu. Wynika to z faktu, że wzrost gospodarczy zależy od dynamiki zasobu pracy, która jest egzogeniczna. Z drugiej strony w modelu występuje wzrost wartości konsumpcji, kapitału fizycznego oraz produktu (Jones 2005).

3. Metodyka badania

W tej części artykułu zostanie omówiona metodyka badania. Wykorzystane narzędzia zostały zapożyczone głównie z literatury poświęconej DSGE. Podstawowym narzędziem wyznaczania ekstremum lokalnego funkcji jest metoda mnożników Lagrange'a. Stosuje się ją w modelach klasy DSGE, aczkolwiek jest też przydatna w konstrukcjach wywodzących się z teorii wzrostu, zaadaptowanych m.in. do analizy fluktuacji.

Analizowane w artykule modele zostały zapisane w ogólnej postaci problemu maksymalizacyjnego, w którym optymalizowana jest funkcja o L zmiennych sterujących $x_{l,t}$ oraz K zmiennych stanu (Wickens 2008). Następnie skonstruowano funkcję Lagrange'a. Argumentami tej funkcji są zmienne stanu $y_{j,t}$, zmienne sterujące $x_{l,t}$ oraz mnożnik $\lambda_{j,t}$ dla każdego okresu t w nieskończonym horyzoncie nieskończonym. Liczba mnożników Lagrange'a w każdym okresie t jest równa liczbie ograniczeń, czyli liczbie równań ruchu zmiennych (Novales, Fernandez, Ruiz 2009):

$$L = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} F(y_{1,t}, \dots, y_{K,t}) - \sum_{t=0}^{\infty} (\lambda_1(G_1(y_{1,t}, \dots, y_{K,t}, x_{1,t}, \dots, x_{L,t})) + \dots + \lambda_t(G_t(y_{1,t}, \dots, y_{K,t}, x_{1,t}, \dots, x_{L,t}))) \right\} \quad (23)$$

Następnie obliczono tzw. warunki pierwszego rzędu (Wickens 2008). Polega to na obliczeniu pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a względem wszystkich zmiennych stanu, sterujących oraz mnożników Lagrange'a w momencie t . Później każde z obliczonych w ten sposób wyrażen jest przyrównywane do zera (Klima 2005):

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall_{k \in \{1, \dots, K\}} \frac{\partial L}{\partial y_{k,t}} = 0 \\ \forall_{l \in \{1, \dots, L\}} \frac{\partial L}{\partial x_{l,t}} = 0 \\ \forall_{l \in \{1, \dots, L\}} \frac{\partial L}{\partial \lambda_{l,t}} = 0 \end{array} \right. \quad (24)$$

Pierwsze równanie układu (24) odnosi się do zmiennych maksymalizowanych, czyli tzw. zmiennych stanu. Drugie jest związane ze zmiennymi sterującymi, a ostatnie dotyczy funkcji Lagrange'a wykorzystywanej w zadaniu optymalizacyjnym (24).

Na podstawie otrzymanego układu obliczono równania Eulera, przez wyeliminowanie mnożników Lagrange'a z drugiego zestawu (24). Równania Eulera określają zależność zmiennych stanu pomiędzy okresami. W modelach uwzględniających szoki stochastyczne równania Eulera opisują wartość oczekiwaną w okresie t w zależności od wielkości zmiennych w okresie $t + 1$ (Wickens 2008). Istotnym elementem modeli opartych na dynamicznej optymalizacji jest stan ustalony (ang. *steady state*). W modelu wyrażonym w czasie dyskretnym o nieskończonym horyzoncie czasowym odnosi się on do sytuacji, w której żadna ze zmiennych układu dynamicznego, a więc zmiennych sterujących oraz zmiennych stanu, nie zmienia się w czasie (Novales, Fernandez, Ruiz 2009). Zmienne losowe modelu, tak jak w przypadku określania warunków pierwszego rzędu, będą stałe w czasie, a ich wartość będzie równa wartości oczekiwanej.

W modelach, w których stan stacjonarny ma postać trendu zmiennych stanu lub sterujących, powyższy układ będzie wyrażony w postaci relacji pomiędzy zmiennymi. Wprowadzone zostaną nowe oznaczenia, wyrażające relacje między poszczególnymi zmiennymi. Zmieni się też równanie Eulera, które będzie wymagać odtrendowania układu, czyli wprowadzenia nowych zmiennych określonych jako proporcje pomiędzy podstawowymi zmiennymi modelu⁷.

Kolejnym krokiem jest zastosowanie metody aproksymacyjnej. W badaniu wykorzystano przybliżenie logarytmiczno-liniowe, polegające na zapisaniu układu równań Eulera oraz równań ruchu zmiennych sterujących jako układu liniowego. W tym celu dla każdej zmiennej układu wprowadzono zmienną pomocniczą stanowiącą różnicę między logarytmami zmiennej w okresie t oraz w stanie stacjonarnym. Jako $\hat{y}_{k,t}$ oznaczono zmienną pomocniczą w momencie t dla k -tej zmiennej stanu⁸. Ogólna zależność pomiędzy obserwacjami może zostać zapisana za pomocą następującego równania (Novales, Fernandez, Ruiz 2009):

$$\mathbf{V}_{k \in \{1, \dots, K\}} \hat{y}_{k,t} = \ln \left(\frac{y_{k,t}}{\bar{y}_k} \right) = \ln(y_{k,t}) - \ln(\bar{y}_k) \quad (25)$$

Wykorzystując prawo iterowanych oczekiwań oraz liniowość operatora wartości oczekiwanej, wartości odpowiadające części stochastycznej w okresie $t + 1$ można wyznaczyć za pomocą autoregresyjnej postaci równania opisującego tę część modelu (Novales, Fernandez, Ruiz 2009). Za pomocą wzoru (25) wyprowadzony zostanie układ równań (26) opisujący kształtowanie się zmiennych wokół stanu ustalonego

$$M_0 \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,t+1} \\ \dots \\ \hat{x}_{L,t+1} \\ E\hat{y}_{1,t+1} \\ \dots \\ E\hat{y}_{K,t+1} \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{x}_{L,t} \\ \hat{y}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{y}_{K,t} \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{\eta}_{L,t} \end{bmatrix} \quad (26)$$

⁷ Zabieg ten zostanie wykorzystany w modelu Uzawy i Lucasa oraz Jonesa.

⁸ Analogiczne własności związane z przyjętą techniką aproksymacyjną można pokazać dla każdej zmiennej sterującej $\hat{x}_{k,t}$.

gdzie M_0 oraz M_1 są macierzami kwadratowymi o wymiarach $(K + L) \times (K + L)$, a elementy tych macierzy są funkcjami parametrów modelu⁹. Macierz M_2 , opisująca wpływ elementu stochastycznego modelu, ma wymiary $(K + L) \times L$.

Układ (26) można sprowadzić do postaci rekurencyjnej (27). Macierze opisujące różnice między logarytmami w okresie t oraz szoki w okresie t zostaną prawostronnie przemnożone przez odwrotność macierzy współczynników dla różnic logarytmów w okresie $t + 1$. W rezultacie przekształcony układ będzie jednoznacznie wyznaczał różnice między logarytmami zmiennych modelu:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1,t+1} \\ \dots \\ \hat{x}_{L,t+1} \\ E\hat{y}_{1,t+1} \\ \dots \\ E\hat{y}_{K,t+1} \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{x}_{L,t} \\ \hat{y}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{y}_{K,t} \end{bmatrix} + M_4 \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{\eta}_{L,t} \end{bmatrix} \quad (27)$$

W dalszej kolejności wykorzystano rozkład macierzy względem wartości własnych. Łatwo zauważyć, że macierz M_3 może zostać zortogonalizowana:

$$M_3 = P\Delta P^{-1} \quad (28)$$

Macierz P stworzona została z wektorów własnych macierzy M_3 w ten sposób, że j -ty wektor własny macierzy M_3 jest j -tą kolumną macierzy P . Z kolei Δ jest macierzą diagonalną. Elementami na przekątnej są wartości własne macierzy M_3 :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{K+L} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Oznaczając macierz odwrotną do macierzy P jako p , czyli $p = P^{-1}$, rozważany układ można opisać następująco:

$$Q = P^{-1}M_4 = pM_4 \quad (30)$$

Przyjęto, że pierwsze L (liczba zmiennych stanu) wartości własnych jest stabilne, czyli moduł tych wartości bezwzględnych jest mniejszy od jedności:

$$\forall_{i \in \{1, \dots, L\}} |\lambda_i| < 1 \quad (31)$$

Następnie zdefiniowano wektor pomocniczy f_t , będący iloczynem macierzy p oraz wektora zmiennych w momencie t :

⁹ Elementami macierzy mogą też być wartości w stanie ustalonym, które także są funkcjami parametrów modelu.

$$f_t = P \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,t+1} \\ \dots \\ \hat{x}_{L,t+1} \\ E\hat{y}_{1,t+1} \\ \dots \\ E\hat{y}_{K,t+1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Na podstawie wzorów (29) oraz (30) można otrzymać (33):

$$Ef_{t+1} = \Delta f_t + Q \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{\eta}_{L,t} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Po przekształceniach algebraicznych i zastosowaniu prawa iteracyjnych oczekiwań wyznaczono następującą zależność (Novales, Fernandez, Ruiz 2009):

$$s_0 \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{x}_{L,t} \end{bmatrix} + s_1 \begin{bmatrix} \hat{y}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{y}_{K,t} \end{bmatrix} = s_2 \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{\eta}_{L,t} \end{bmatrix} \quad (34)$$

gdzie:

$$S_0 = \begin{bmatrix} p_{L+1,1} & \dots & p_{L+1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K,1} & \dots & p_{K,L} \end{bmatrix} \quad (35)$$

oraz

$$S_1 = \begin{bmatrix} p_{L+1,L+1} & \dots & p_{L+1,L+K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K,L+1} & \dots & p_{K,L+K} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Z kolei S_2 to macierz, której ogólną postać dla każdego elementu można zapisać następująco:

$$S_2 = [s_{2,i,j}] = \frac{Q_{L+i,j}}{\phi_j - \lambda_{L+i}} \quad (37)$$

Ostatecznie wyznaczono równanie rekurencyjne dla zmiennej sterującej (38). Kolejnym etapem jest wielokrotne symulowanie tej postaci aproksymacyjnej modelu (Novales, Fernandez, Ruiz 2009). W każdej symulacji parametry modelu i wielkości szoków są takie same. Dodatkowo, wartość zaburzeń losowych jest stała:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{y}_{K,t} \end{bmatrix} = -S_1^{-1} S_0 \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{x}_{L,t} \end{bmatrix} + -S_1^{-1} S_2 \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{1,t} \\ \dots \\ \hat{\eta}_{L,t} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Wpływ szoku stochastycznego przedstawiono za pomocą funkcji reakcji na impuls IRF (ang. *impulse reaction function*). Wykres tej funkcji dla danej zmiennej przedstawia różnice między logarytmami zmiennej w rozważanym horyzoncie czasowym.

Porównanie wyników symulacji z danymi empirycznymi wymaga dwóch zabiegów. Pierwszy to dekompozycja szeregów czasowych, która jest szczegółowo opisana w kolejnym podrozdziale artykułu. Drugi to odtworzenie obserwacji podstawowych zmiennych modelu (inwestycje, konsumpcja, produkt) na podstawie symulacji. Problem pojawia się w przypadku modeli charakteryzujących się stanem stacjonarnym w postaci ścieżki zrównoważonego wzrostu. Dlatego przyjęto początkowe wartości dla jednej zmiennej w modelu Uzawy i Lucasa (początkowa wartość kapitału ludzkiego h_0) oraz Jonesa (początkowa wartość kapitału ludzkiego A_0).

Bezpośrednie porównanie wyników symulacji z danymi empirycznymi jest utrudnione z powodu odmiennych założeń przyjętych przy konstrukcji każdego z modeli. Ponadto różna może być długookresowa tendencja wzrostu. Dlatego analiza wpływu zaburzeń losowych w rozważanych modelach wzrostu wymaga dekompozycji szeregów czasowych na element odpowiedzialny za trend długookresowy oraz składową związaną z wahaniami cyklicznymi (Heer, Mausner 2005). Aby porównać wyniki symulacji modeli z danymi empirycznymi zaprezentowanymi w rozdziale pierwszym, wykorzystano filtr Hodricka i Prescottta (1997). Jest to najpopularniejszy sposób porównania symulacji modeli wzrostu, do których wprowadzono szok stochastyczny, z szeregami czasowymi opisującymi zmienne makroekonomiczne (Heer, Mausner 2005).

4. Wyniki

W tej części artykułu przedstawione zostaną wyniki symulacji. Konieczne jest określenie założeń związanych z analizą wyników oraz wprowadzaniem zaburzeń stochastycznych. Po pierwsze, kalibrację konstrukcji oparto na kwartalnych wartościach parametrów. Po drugie, analiza modeli będzie obejmować wpływ jednoprocetowego szoku stochastycznego (technologicznego oraz specyficznego dla modelu). Odchylenie standardowe składnika losowego jest takie samo we wszystkich rozważanych przypadkach i wynosi 0,0072, czyli tyle co w pracy Kinga i Rebelo (1999). Ponadto siła inercji opisywana przez współczynniki procesu autoregresyjnego, a więc ϕ_1 w modelu Ramseya oraz ϕ_1 , ϕ_2 i ϕ_3 w pozostałych modelach, jest wartością stałą równą 0,95. Po trzecie, elastyczność kapitału w zagregowanej funkcji produkcji oraz współczynnik dyskontujący, czyli parametry α i β , wynoszą 1/3 oraz 0,99 dla każdego z modeli. Badanie wpływu pojedynczego zaburzenia stochastycznie ograniczono do 100 obserwacji, czyli 25 lat.

Kalibracja uwzględnia dwie implikacje, istotne dla długookresowych własności modeli. Po pierwsze, w każdym z konkurencyjnych mechanizmów wzrostu gospodarczego założono, że długookresowa stopa wzrostu produktu wynosi 1% rocznie. Drugie założenie dotyczy struktury produktu: całkowita suma inwestycji w gospodarce stanowi piątą część zagregowanej produkcji.

W porównaniach wyników symulacji z danymi empirycznymi wykorzystano agregaty konsumpcji, produktu oraz inwestycji dla gospodarki Stanów Zjednoczonych. Dane pochodzą z Biura Analiz Ekonomicznych (ang. Bureau of Economic Analysis). Szeregi czasowe obejmują 167 obserwacji kwartalnych, od stycznia 1967 r.

4.1. Model Ramseya

Wartości parametrów kalibracji, zawarte w tabeli 1, są powszechnie stosowane w metodyce DSGE. W ujęciu rocznym założono 8-procentową deprecjację kapitału fizycznego. Z kolei tempo wzrostu zasobu pracy wynosi 1% w skali roku. Przyjęto, że parametr A jest równy 0,1.

Reakcja modelu na pozytywny szok technologiczny została zilustrowana na wykresach 1–4. Widać na nich małą wrażliwość modelu na zaburzenia losowe. Po wystąpieniu szoku stochastycznego następuje jednoprocenowy spadek kapitału przypadającego na efektywną jednostkę pracy. W kolejnych kwartałach wartość odchylenia tej wielkości od stanu ustalonego zaczyna się zmniejszać, aż do 80. kwartału, w którym wpływ szoku wygasa.

Po wystąpieniu szoku technologicznego wartość konsumpcji na jednostkę efektywnej pracy rośnie o 0,5% w porównaniu z wielkością w stanie ustalonym. W kolejnych okresach odchylenie to maleje i po 20 latach wartość zmiennej jest zbliżona do wielkości w stanie stacjonarnym.

Wartość produktu na jednostkę efektywnej pracy wzrasta po wystąpieniu szoku stochastycznego. Maksymalne odchylenie od wartości w stanie ustalonym, które jest obserwowane w pierwszym kwartale, wynosi 0,7%. Następnie różnice między logarytmami tej zmiennej maleją i w rezultacie zmienna osiąga taką wartość jak w stanie stacjonarnym po upływie około 80 kwartałów.

Odchylenie niestacjonarnych zmiennych ekonomicznych, a więc wartości zagregowanych uwzględniających egzogeniczny mechanizm wzrostu gospodarczego, w modelu Ramseya, od wartości w stanie ustalonym zilustrowano na wykresie 5. Po wystąpieniu standardowego szoku technologicznego największym odchyleniem charakteryzują się inwestycje, a najmniejszym – konsumpcja.

4.2. Model Uzawy i Lucasa

Parametry kalibracji modelu Uzawy i Lucasa przedstawiono w tabeli 2. Deprecjację kapitału fizycznego określono na 8% w ujęciu rocznym. Tempo wzrostu zasobu pracy jest takie jak w modelu Ramseya i wynosi 1% w ujęciu rocznym. Warto zauważyć, że dotychczasowe badania empiryczne dotyczące kreacji kapitału ludzkiego nie dostarczają spójnych wniosków co do stopy deprecjacji tego czynnika produkcji. Szacuje się, że zazwyczaj wynosi ona od 1% (zob. Haley 1976) do 9% (Ben-Porath 1969) w ujęciu rocznym. Dlatego założono, że stopa deprecjacji kapitału ludzkiego w modelu Uzawy i Lucasa wynosi 0,8% w ujęciu kwartalnym, co będzie wartością zbliżoną do rezultatów otrzymanych przez Heckamana (1976). Dodatkowo, przyjęcie wartości parametrów A oraz B odpowiednio na poziomie 1 oraz 0,0231 umożliwi uzyskanie własności, które zostały określone na początku rozdziału.

Wykresy 6–8 obrazują reakcję na impuls odtrendowanych zmiennych modelu Uzawy i Lucasa. Po wystąpieniu jednoprocenowego szoku technologicznego wzrasta odsetek czasu poświęcanego

działalności produkcyjnej u_t . Przyjmuje on wartość o 1% wyższą niż w stanie stacjonarnym. Z perspektywy „centralnego planisty” taka alokacja jest w tym momencie optymalna, gdyż zaobserwowano wzrost efektywności procesu wytwórczego. Następnie wielkość tej zmiennej spada przez sześć lat do poziomu o 0,2% poniżej wartości w stanie ustalonym. W kolejnych kwartałach odsetek czasu poświęconego działalności produkcyjnej zbliża się do wielkości w stanie ustalonym, który jest osiągnięty po 90 kwartałach.

Zbliżonym do u_t odchyleniem od wartości w stanie ustalonym charakteryzuje się stosunek kapitału fizycznego do kapitału ludzkiego. Maksymalne odchylenie x_t występuje w pierwszym kwartale po wystąpieniu pozytywnego szoku technologicznego i wynosi 1%. W kolejnych okresach wartość tej zmiennej spada i po pięciu latach jest o 0,6% niższa od poziomu w punkcie stałym modelu. Powrót do początkowej wartości jest obserwowany dopiero po 100 kwartałach.

Odmienną tendencją charakteryzuje się relacja konsumpcji do kapitału fizycznego. W momencie wystąpienia szoku stochastycznego wielkość tej zmiennej wzrasta i po czterech latach z_t jest maksymalnie 0,6% wyższe od wartości w stanie stacjonarnym. Następnie odchylenie relacji konsumpcji do kapitału fizycznego zmniejsza się i w rezultacie zmienna wraca do poziomu w stanie ustalonym po 30 latach.

Odchylenie zmiennych ekonomicznych od wartości w stanie stacjonarnym po wystąpieniu pozytywnego szoku technologicznego ilustruje wykres 9. Największe odchylenie od BGP jest obserwowane, podobnie jak w modelu Ramseya, dla inwestycji, jednak w modelu Uzawy i Lucasa charakteryzuje się dwukrotnie wyższą amplitudą. Konsumpcja, która początkowo jest powyżej ścieżki zrównoważonego wzrostu, po 14 kwartałach spada nieznacznie poniżej poziomu w stanie ustalonym.

Drugim z rozważanych zaburzeń losowych w modelu Uzawy i Lucasa jest szok stochastyczny zwiększający efektywność sektora edukacyjnego. Reakcja zmiennych odtrendowanych została przedstawiona na wykresach 10–12. Odsetek czasu poświęcanego na działalność produkcyjną spada o niespełna 1% poniżej poziomu w stanie stacjonarnym. W kolejnych okresach odchylenie tej zmiennej zmniejsza się o wiele szybciej niż w przypadku szoku technologicznego i po 70 kwartałach u_t osiąga wartość w stanie ustalonym.

Relacja konsumpcji do kapitału fizycznego w pierwszym okresie spada poniżej początkowej wartości. Następnie odchylenie z_t od poziomu w stanie ustalonym wzrasta i osiąga ponad 0,03%. W kolejnych kwartałach różnica ta się zmniejsza. Widoczna jest tutaj analogia do szoku technologicznego, ale wpływ tego zaburzenia na relację konsumpcji do kapitału fizycznego jest zdecydowanie słabszy.

Z kolei po wystąpieniu szoku zwiększającego efektywność sektora edukacyjnego spadła wartość relacji kapitału fizycznego do ludzkiego. Największe, ponadjednoprocentowe odchylenie tej zmiennej od stanu stacjonarnego nastąpiło po roku. W kolejnych kwartałach wartość x_t zbliżała się do poziomu w stanie stacjonarnym, który ponownie został osiągnięty po 90 kwartałach.

Reakcję zmiennych niestacjonarnych modelu ilustruje wykres 13. Analogicznie jak w przypadku wystąpienia szoku technologicznego największym odchyleniem od BGP charakteryzują się inwestycje. Brakiem reakcji na to zaburzenie cechuje się kapitał fizyczny. Konsumpcja oraz produkt są początkowo dodatnio odchyłone od ścieżki zrównoważonego wzrostu i po około 15 latach zbliżają się do niej.

4.3. Model Jonesa

Parametry wykorzystane w kalibracji przyjętej postaci modelu Jonesa przedstawia tabela 3. Wartości ϕ oraz μ są tu arbitralne, ale zgodne z propozycją Jonesa (1995) oraz takie same jak w pracy Papageorgioua i Perez-Sebastianiana (2002). Deprecjacja kapitału fizycznego została przyjęta na poziomie 8% w ujęciu rocznym. Z kolei zasób pracy wzrasta o około 1% rocznie. Pozostałe parametry modelu, a więc B i D, zostały ustalone na takim poziomie, aby kalibracja modelu pozwoliła na uzyskanie pożądanych własności, opisanych na początku rozdziału.

Dokładne reakcje zmiennych na szok technologiczny zostały zilustrowane na wykresach 14–17. Po wystąpieniu jednoprocetowego szoku technologicznego wartość zmiennej w_t spada do poziomu o 0,7% niższego niż w stanie ustalonym. W kolejnych kwartałach wartość tej zmiennej rośnie i dopiero po 18 latach iloraz funkcji kreującej wiedzę i poziom technologiczny jest bliski wielkości w stanie ustalonym.

Odmierna jest zmiana odsetka zasobu pracy wykorzystywanego w sektorze badawczym. Po wprowadzeniu zaburzenia stochastycznego zmienna ta bardzo szybko spada, a odchylenie od stanu stacjonarnego wynosi około 1,5 pkt proc. Wynika to z faktu, że dla „centralnego planisty” optymalna jest alokacja większej ilości zasobu pracy do sektora wytwórczego, który chwilowo jest bardziej efektywny. W kolejnych okresach odsetek siły roboczej w sektorze badań i rozwoju wzrasta, a tempo zbliżania się do stanu ustalonego jest coraz mniejsze. Ostatecznie zmienna ta osiąga stan stacjonarny 25 lat po szoku technologicznym.

W przypadku relacji kapitału fizycznego do postępu technologicznego jednorazowy szok stochastyczny powoduje początkowo wzrost tej wartości, po którym następuje szybki spadek. Najmniejszą wielkość zmienna ta ma po 10 latach, a odchylenie od stanu stacjonarnego wynosi niespełna 0,1 pkt proc. W następnych kwartałach relacja kapitału fizycznego do postępu technologicznego zaczyna wzrastać. Tempo tego wzrostu jest z każdym okresem coraz mniejsze. Zmienna osiąga stan stacjonarny modelu po około 40 latach.

Szok stochastyczny dodatnio wpływa na relację konsumpcji do kapitału fizycznego. Po wprowadzeniu zaburzenia technologicznego modelu zmienna ta wzrasta i osiąga maksymalną wartość po sześciu latach. Najwyższa wielkość zmiennej jest odchylna o niespełna 0,6% od wartości w stanie stacjonarnym. W kolejnych okresach relacja konsumpcji do kapitału maleje, a tempo spadku jest coraz mniejsze. Po około 20 latach wielkość tej zmiennej jest równa wartości w stanie ustalonym.

Na uwagę zasługuje fakt, że zmienne niestacjonarne modelu Jonesa reagują bardzo podobnie jak w przypadku modelu Ramseya. Reakcja inwestycji jest analogiczna, ale szok technologiczny ma ponaddwukrotnie większy wpływ. Relatywnie mniej wrażliwymi zmiennymi są konsumpcja oraz kapitał fizyczny.

Wpływ szoku zwiększającego efektywność sektora badań i rozwoju na zmienne odtrendowane przedstawiają wykresy 19–22. Odsetek czasu poświęcanego działalności w tej części gospodarki zwiększył się o około 3% po wystąpieniu tego zaburzenia. Z perspektywy „centralnego planisty” optymalne jest, by odsetek czasu przeznaczanego na działalność badawczą utrzymywał się powyżej stanu ustalonego jeszcze przez 25 lat. Podobnie zmienia się iloraz funkcji kreującej wiedzę do poziomu technologicznego, jednak początkowe odchylenie było tu dwukrotnie mniejsze.

Pozostałe dwie stacjonarne zmienne wykazywały o wiele mniejszą wrażliwość na szok zwiększający funkcję kreacji wiedzy w porównaniu choćby z szokiem technologicznym.

4.4. Analiza porównawcza

W tym podrozdziale autokorelacja oraz korelacja krzyżowa części cyklicznej otrzymanych symulacji zostaną porównane z danymi empirycznymi opisującymi gospodarkę amerykańską. Analiza porównawcza odbędzie się na logarytmach naturalnych otrzymanych wyników symulacji oraz empirycznych szeregów czasowych, a przedmiotem analizy będzie szok technologiczny.

Wyniki obliczonych współczynników autokorelacji części cyklicznej produktu, które przedstawia tabela 4, są bardzo podobne w analizowanych modelach. Z kolei w porównaniu z danymi empirycznymi autokorelacja tych wielkości jest najbliższa wynikom symulacji otrzymanych za pomocą modelu Jonesa. W rozważanym dwuletnim okresie znak autokorelacji dla każdego z analizowanych modeli jest zgodny w siedmiu spośród ośmiu opóźnień.

Autokorelacje części cyklicznej dla konsumpcji, które zostały zestawione w tabeli 5, charakteryzują się większą różnorodnością niż w przypadku produktu. Najlepiej skorelowane z własnymi opóźnieniami są wyniki symulacji modelu Jonesa, a najgorzej – Ramseya. Ponadto autokorelacja składnika cyklicznego dla konsumpcji w modelu Jonesa w siedmiu na osiem rozważanych opóźnień ma ten sam znak. W przypadku pozostałych modeli tylko w sześciu przypadkach w analizowanym horyzoncie czasowym kierunek wpływu części cyklicznej konsumpcji jest taki sam jak w przypadku danych empirycznych dla gospodarki Stanów Zjednoczonych.

Podobne wnioski jak w przypadku konsumpcji, można wyciągnąć dla inwestycji. Wyniki dotyczące tej zmiennej zostały zestawione w tabeli 6. W porównaniu z danymi empirycznymi najbardziej podobne wartości autokorelacji składnika cyklicznego dla produktu zostały otrzymane za pomocą modelu Jonesa. Z kolei najmniej podobne są te, które zostały obliczone na podstawie symulacji modelu Ramseya.

Kierunek wpływu kolejnych opóźnień jest najbardziej zgodny z danymi dla amerykańskiej gospodarki w przypadku modelu Jonesa oraz Uzawy i Lucasa. Aż siedem znaków autokorelacji części cyklicznej inwestycji jest zgodnych z empirią. Z kolei w modelu Ramseya kierunek wpływu opóźnionych części cyklicznej inwestycji jest zgodny z danymi empirycznymi w sześciu przypadkach w dwuletnim horyzoncie czasowym.

Pozostała część analizy porównawczej opiera się na korelacji części cyklicznej produktu z opóźnionymi wartościami konsumpcji i inwestycji. Zestawienie pierwszej pary, czyli korelacji produktu z opóźnionymi wielkościami konsumpcji, prezentuje tabela 7.

Korelacja pomiędzy częściami cyklicznymi produktu i konsumpcji jest bardzo podobna do uzyskanej przez dekompozycję spektralną danych empirycznych w przypadku modelu Jonesa i w mniejszym stopniu – modelu Uzawy i Lucasa. Analizując opóźnienia konsumpcji, można dojść do wniosku, że najbliższe obserwacjom amerykańskiej gospodarki są wyniki symulacji modelu uwzględniającego sektor badań i rozwoju. Znaki korelacji produktu z konsumpcją są zgodne w 10 spośród 11 rozważanych opóźnień konsumpcji. Z kolei znak korelacji w modelu Uzawy i Lucasa oraz Ramseya jest taki sam jak w przypadku danych empirycznych w dziewięciu opóźnieniach.

Drugą parą zmiennych, dla których została obliczona korelacja, jest produkt i inwestycje. Analizę zależności pomiędzy częścią cykliczną produktu a opóźnionymi składowymi odpowiedziami za wahania koniunkturalne przedstawia tabela 8. Analiza korelacji części cyklicznej produktu i kapitału fizycznego bez uwzględnienia zmiennych opóźnionych pozwala stwierdzić, że otrzymane wyniki symulacji modelu Ramseya najlepiej odzwierciedlają zależność statystycz-

ną między produktem a inwestycjami, obserwowaną w gospodarce amerykańskiej. Zupełnie odmienne wnioski można wyciągnąć po rozszerzeniu porównania na zmienne opóźnione modelu. Najbardziej podobne do danych empirycznych są wartości korelacji krzyżowej dla modelu Uzawy i Lucasa. Znak korelacji dla rozważanych zmiennych jest zgodny w 10 na 11 rozważanych opóźnień. Pozostałe modele wykazują zgodność znaków w 8 na 11 rozważanych różnic czasowych pomiędzy inwestycjami a produkcją.

5. Podsumowanie i wnioski

Reakcja poszczególnych zmiennych modeli na szok stochastyczny była taka sama. Zaburzeniom losowym zwiększającym TFP towarzyszył początkowy wzrost dynamiki konsumpcji i produktu. Reakcje zmiennych ekonomicznych rozważanych modeli różniły się wielkościami, czyli odchyleniem od stanu ustalonego, oraz czasem, jaki jest potrzebny, aby wartości zmiennych wróciły do stanu stacjonarnego. Najdłużej obserwowano zaburzenie stochastyczne w przypadku składników modelu Jonesa, najkrócej – modelu Ramseya.

Istotne wnioski z badawczego punktu widzenia nasuwają się po porównaniu otrzymanych wyników symulacji z danymi empirycznymi. Analiza autokorelacji części związanej z wahaniami cyklicznymi wykazała, że wyniki otrzymane za pomocą modeli z endogenicznym lub semiendogenicznym mechanizmem wzrostu gospodarczego są bardziej zgodne z obserwacjami dla gospodarki amerykańskiej. Podobnie wnioski mogą zostać wyciągnięte z porównania korelacji krzyżowej.

Z przeprowadzonego badania wynika potrzeba rozszerzenia konstrukcji modelu Ramseya o endogeniczny lub semiendogeniczny mechanizm tłumaczący wzrost gospodarczy. Oba podejścia pozwoliły na otrzymanie wyników bardziej zgodnych z danymi empirycznymi opisującymi gospodarkę Stanów Zjednoczonych.

Analiza została przeprowadzona z punktu widzenia „centralnego planisty” modeli. Najbardziej intuicyjnym rozszerzeniem badania jest objęcie nim sektora gospodarstw domowych, produkcyjnego oraz badań i rozwoju. Innym rozwiązaniem może być rozszerzenie spektrum analizy zaburzeń stochastycznych, tj. wprowadzenie asymetrycznych szoków stochastycznych. Kolejną możliwością jest połączenie rozważanych dwóch źródeł wzrostu gospodarczego, czyli kapitału ludzkiego oraz działalności sektora R+D, np. za pomocą adaptacji modelu zaproponowanego przez Strulika (2005). Wyniki badania zachęcają też do obrania innego kierunku badawczego, którym jest analiza wahań średniokresowych głównych zmiennych makroekonomicznych, co postulowali m.in. Comin i Gertler (2006).

Bibliografia

- Aghion P., Howitt P. (1992), A model of growth through creative destruction, *Econometrica*, 60(2), 323–351.
- Arnold L.G. (2006), The dynamics of the Jones R&D growth model, *Review of Economic Dynamics*, 9(1), 143–152.
- Barro R.J., Sala-i-Martin X. (1995), *Economic growth*, The MIT Press, London.

- Ben-Porath Y. (1967), The production of human capital and the life cycle of earnings, *Journal of Political Economy*, 75(4), 352–365.
- Cass D. (1965), Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation, *Review of Economic Studies*, 32(4), 233–240.
- Comin D., Gertler M. (2006), Medium-term business cycles, *American Economic Review*, 96(3), 523–551.
- Gradzewicz M. (2009), *Endogenous growth mechanism as a source of medium term fluctuations in the labor market. Application to the US economy*, National Bank of Poland Working Paper, 57, Narodowy Bank Polski, Warszawa.
- Haley W.J. (1976). Estimation of earnings profile from optimal human capital accumulation, *Econometrica*, 44(6), 1223–1238.
- Heckman J.J. (1976), A life-cycle model of earnings, learning and consumption, *Journal of Political Economy*, 84(4–2), 11–44.
- Heer B., Mausner A. (2005), *Dynamic general equilibrium modeling. Computational methods and applications*, Springer, Berlin.
- Hiraguchi R. (2009), A note on the closed-form solution to the Lucas-Uzawa model with externality, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(10), 1757–1760.
- Hodrick R., Prescott E.C. (1997), Postwar U.S. business cycles: an empirical investigation, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 29(1), 1–16.
- Jones Ch.I. (1995), R&D – based model of economic growth, *Journal of Political Economy*, 103(4), 759–784.
- Jones Ch.I. (2005), Growth and ideas, w: P. Agnion, S.N. Durlauf (red.), *Handbook of economic growth*, Elsevier, Amsterdam.
- King R.G., Rebelo S.T. (1999), Resuscitating real business cycles, w: J.B. Taylor, M. Woodford, *Handbook of macroeconomics*, Elsevier, Amsterdam.
- Klenow P.J., Rodriguez-Clare A. (2004), *Externalities and growth*, NBER Working Paper Series, 11009, Washington.
- Klima G. (2005), *Programowanie dynamiczne i modele rekursywne w ekonomii*, Materiały i Studia NBP, 201, Narodowy Bank Polski, Warszawa.
- Koopmans T.C. (1965), On the concept of optimal economic growth, w: The economic approach to development planning, North-Holland, Amsterdam.
- Kydland F.E., Prescott E.C. (1982), Time to build and aggregate fluctuations, *Econometrica*, 50(6), 1345–1370.
- Lucas R.E. (1988), On the mechanism of economic development, *Journal of Monetary Economics*, 22(1), 3–42.
- Mankiw N.D., Romer D., Weil N.D. (1992), A contribution to the empirics of economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407–437.
- Novales A., Fernandez E., Ruiz J. (2009), *Economic growth: theory and numerical solution methods*, Springer, Heidelberg.
- Papageorgiou Ch., Perez-Sebastian F. (2002), *Human capital and convergence in a non-scale R&D growth model*, Departmental Working Papers Department of Economics, Louisiana State University, Baton Rouge.
- Pratt J.W. (1964), Risk aversion in the small and in the large, *Econometrica*, 32(1), 122–136.
- Ramsey F. (1928), A mathematical theory of saving, *Economic Journal*, 38(154), 543–559.

- Romer P.M. (1990), Endogenous technological change, *Journal of Political Economy*, 98(5), 71–102.
- Solow R.M. (1956), A contribution to the theory of economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65–94.
- Strulik H. (2005), The role of human capital and population growth in R&D-based models of economic growth, *Review of International Economics*, 13(1), 129–145.
- Uzawa H. (1964), Optimal growth in a two sector model of capital accumulation, *Review of Economic Studies*, 31(1), 1–24.
- Wickens M. (2008), *Macroeconomic theory. A dynamic general equilibrium approach*, Princeton University Press, Princeton–Oxford.

Podziękowania

Autor pragnie podziękować Jakubowi Growcowi oraz anonimowym recenzentom za cenne uwagi, które pozwoliły znacznie zwiększyć wartość tekstu, a także Pani Iwonie Stefaniak z Departamentu Edukacji i Wydawnictw NBP za szczegółową korektę tekstu. Ewentualne pozostające błędy pochodzą wyłącznie od autora.

Aneks

Tabela 1
Parametry modelu Ramseya

β	α	δ	A	n	g	θ
0,99	0,33	0,02	0,1	0,0025	0,0025	2

Tabela 2
Parametry modelu Uzawy i Lucasa

β	α	A	δ_k	δ_h	B	n	θ
0,99	0,33	1	0,02	0,008	0,0231	0,0025	2

Tabela 3
Wartości parametrów dla modelu Jonesa

β	α	δ	ϕ	μ	n	B	D	θ
0,99	0,33	0,02	0,5	0,5	0,0025	0,115	0,1	2

Tabela 4
Wartości autokorelacji produktu

Opóźnienie (w kwartałach)	Stany Zjednoczone	Model Ramseya	Model Uzawy i Lucasa	Model Jonesa
1	0,824	0,562	0,601	0,732
2	0,603	0,321	0,462	0,583
3	0,362	0,195	0,342	0,371
4	0,157	-0,063	0,152	0,191
5	-0,038	-0,120	0,089	-0,022
6	-0,180	-0,221	-0,076	-0,131
7	-0,283	-0,245	-0,043	-0,149
8	-0,332	-0,291	-0,104	-0,203

Źródło: opracowano na podstawie danych Bureau of Economic Analysis.

Tabela 5
Wartości autokorelacji konsumpcji

Opóźnienie (w kwartałach)	Stany Zjednoczone	Model Ramseya	Model Uzawy i Lucasa	Model Jonesa
1	0,809	0,347	0,643	0,719
2	0,600	0,212	0,501	0,642
3	0,386	0,138	0,421	0,431
4	0,192	-0,022	0,159	0,201
5	0,039	-0,103	0,164	-0,091
6	-0,104	-0,134	0,113	-0,183
7	-0,251	-0,145	-0,032	-0,213
8	-0,353	-0,143	-0,191	-0,314

Źródło: opracowano na podstawie danych Bureau of Economic Analysis.

Tabela 6
Wartości autokorelacji inwestycji

Opóźnienie (w kwartałach)	Stany Zjednoczone	Model Ramseya	Model Uzawy i Lucasa	Model Jonesa
1	0,912	0,623	0,784	0,873
2	0,802	0,452	0,583	0,812
3	0,602	0,214	0,446	0,638
4	0,482	0,093	0,427	0,507
5	0,321	-0,049	0,279	0,237
6	0,123	-0,109	0,138	0,172
7	-0,056	-0,152	0,053	0,034
8	-0,267	-0,231	-0,142	-0,087

Źródło: opracowano na podstawie danych Bureau of Economic Analysis.

Tabela 7
Wartości korelacji krzyżowej produktu z opóźnionymi wartościami konsumpcji

Opóźnienie (w kwartałach)	Stany Zjednoczone	Model Ramseya	Model Uzawy i Lucasa	Model Jonesa
-5	-0,041	-0,150	-0,253	0,285
-4	0,146	-0,062	-0,139	0,347
-3	0,349	0,092	0,126	0,759
-2	0,590	0,192	0,413	0,798
-1	0,787	0,253	0,563	0,829
0	0,861	0,302	0,793	0,835
1	0,715	0,301	0,411	0,493
2	0,545	0,242	0,274	0,421
3	0,368	0,142	0,129	0,241
4	0,223	0,004	0,083	0,072
5	0,084	-0,163	0,007	0,009

Uwaga: wartość w pierwszej kolumnie oznacza różnicę w czasie pomiędzy produktem a konsumpcją. Gdy wartość ta wynosi -5, porównywana jest para składająca się z produktu i konsumpcji opóźnionej o pięć okresów.

Źródło: opracowano na podstawie danych Bureau of Economic Analysis.

Tabela 8
Wartości korelacji krzyżowej produktu z opóźnionymi wartościami inwestycji

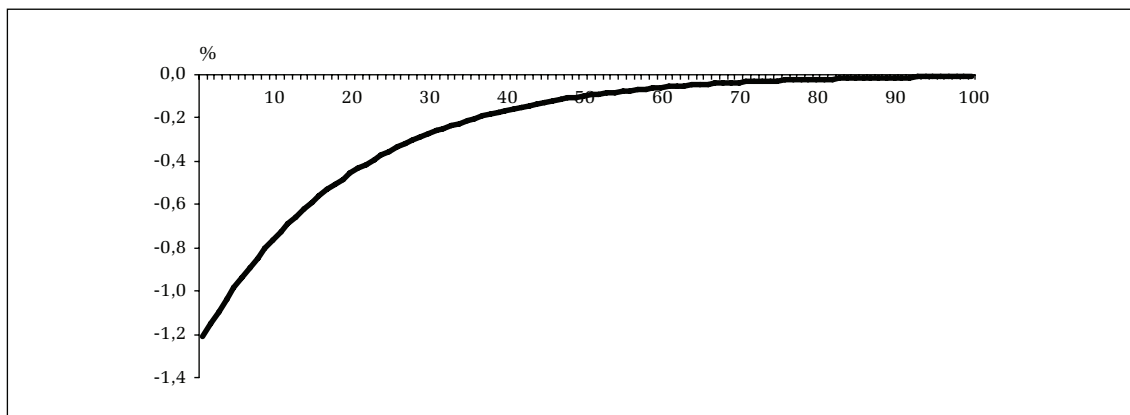
Opóźnienie (w kwartałach)	Stany Zjednoczone	Model Ramseya	Model Uzawy i Lucasa	Model Jonesa
-5	-0,171	-0,123	-0,213	0,026
-4	-0,023	0,031	-0,011	0,092
-3	0,321	0,118	0,231	0,621
-2	0,521	0,203	0,542	0,734
-1	0,723	0,321	0,692	0,812
0	0,561	0,424	0,736	0,758
1	0,432	0,356	0,347	0,504
2	0,334	0,271	0,283	0,407
3	0,213	0,112	0,182	0,381
4	0,185	-0,021	0,123	0,130
5	-0,092	-0,191	0,070	-0,005

Uwaga: wartość w pierwszej kolumnie oznacza różnicę w czasie pomiędzy produktem a kapitałem fizycznym. Gdy wartość ta wynosi -5, porównywana jest para składająca się z produktu i inwestycji opóźnionej o pięć okresów.

Źródło: opracowano na podstawie danych Bureau of Economic Analysis.

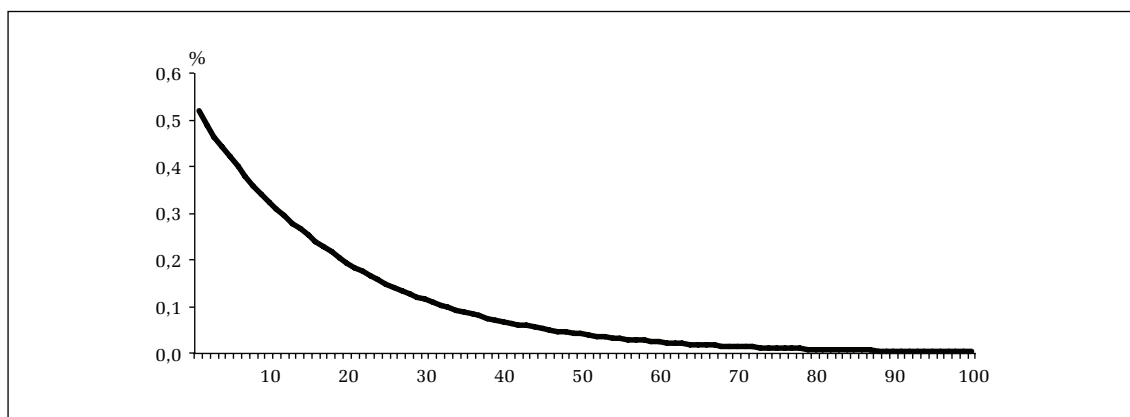
Wykres 1

Funkcja reakcji na impuls dla kapitału fizycznego na jednostkę efektywnej pracy w modelu Ramseya



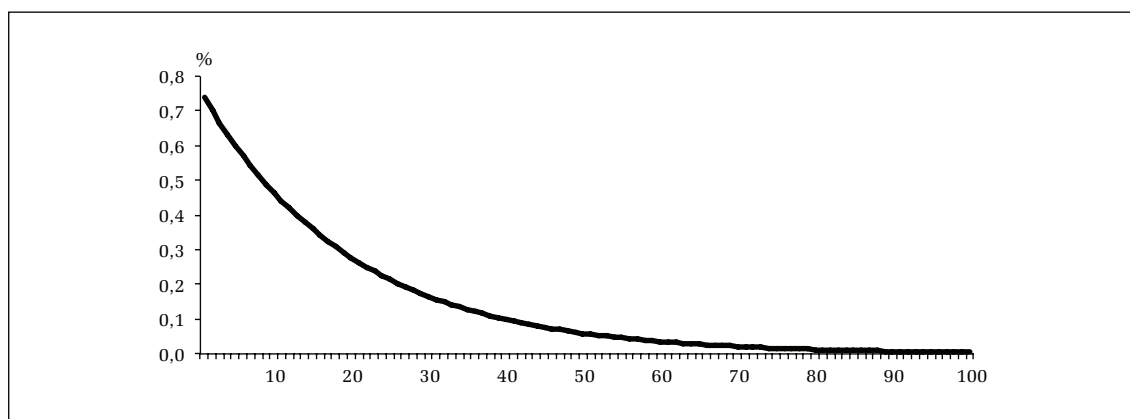
Wykres 2

Funkcja reakcji na impuls dla konsumpcji na jednostkę efektywnej pracy w modelu Ramseya



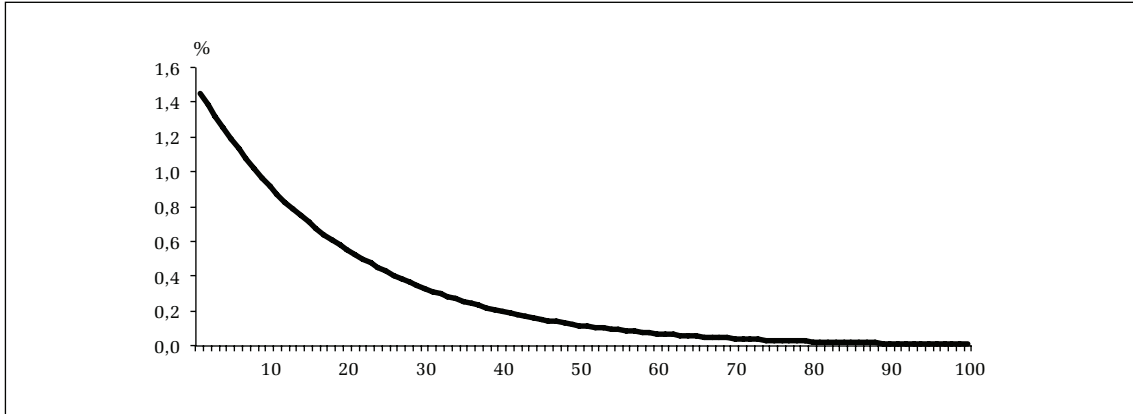
Wykres 3

Funkcja reakcji na impuls dla produktu na jednostkę efektywnej pracy w modelu Ramseya



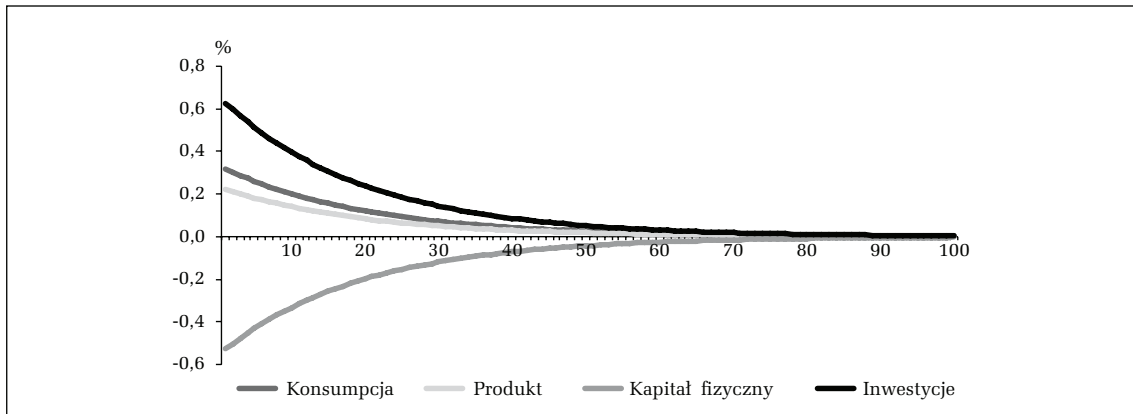
Wykres 4

Funkcja reakcji na impuls dla inwestycji na jednostkę efektywnej pracy w modelu Ramseya



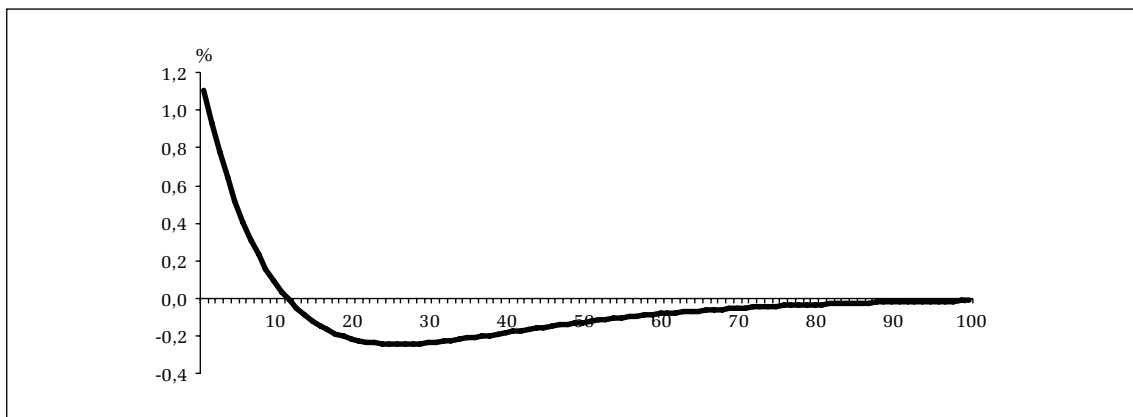
Wykres 5

Odchylenie zmiennych ekonomicznych od wartości w stanie ustalonym w modelu Ramseya po wystąpieniu szoku technologicznego



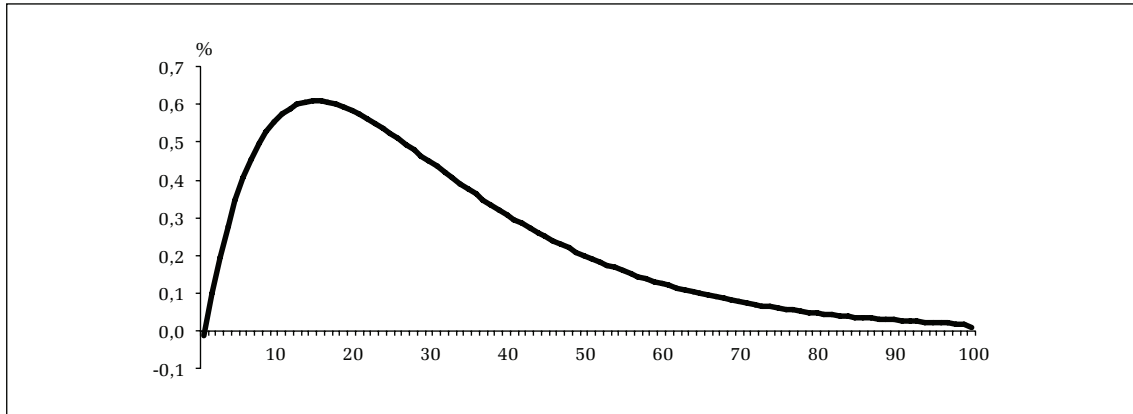
Wykres 6

Funkcja reakcji na impuls dla odsetka czasu poświęcanego działalności produkcyjnej w modelu Uzawy i Lucasa



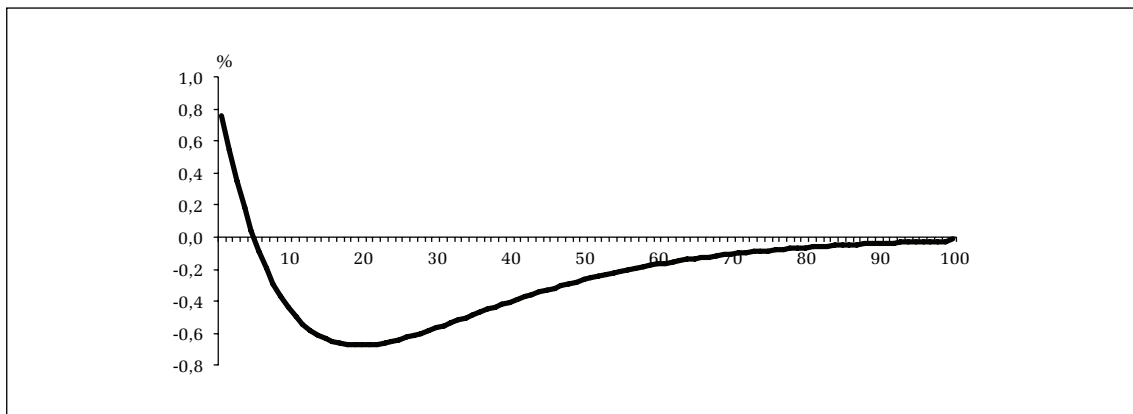
Wykres 7

Funkcja reakcji na impuls dla proporcji konsumpcji do kapitału fizycznego w modelu Uzawy i Lucasa



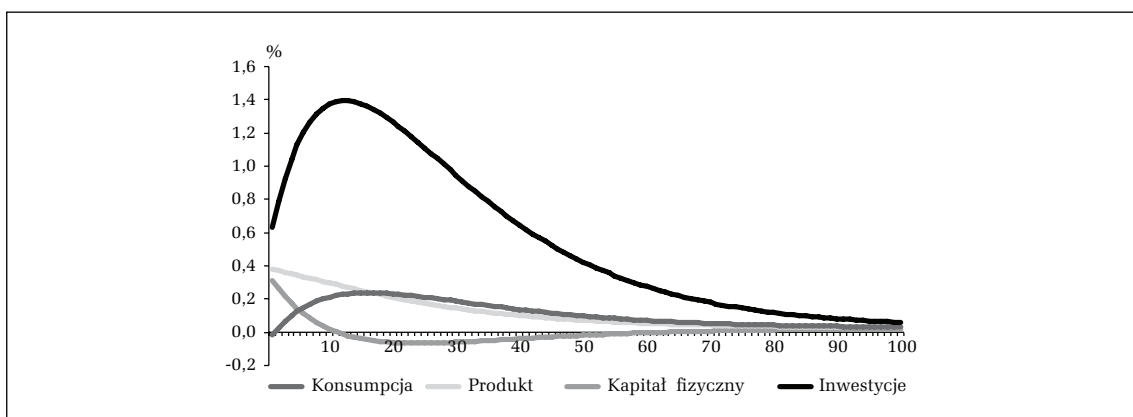
Wykres 8

Funkcja reakcji na impuls dla proporcji kapitału fizycznego do ludzkiego w modelu Uzawy i Lucasa



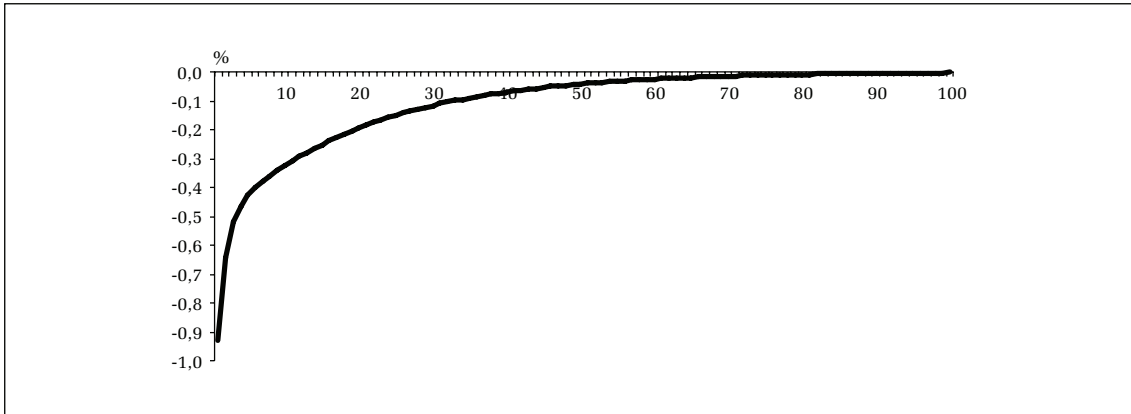
Wykres 9

Odchylenie zmiennych ekonomicznych od wartości w stanie ustalonym w modelu Uzawy i Lucasa po wystąpieniu szoku technologicznego



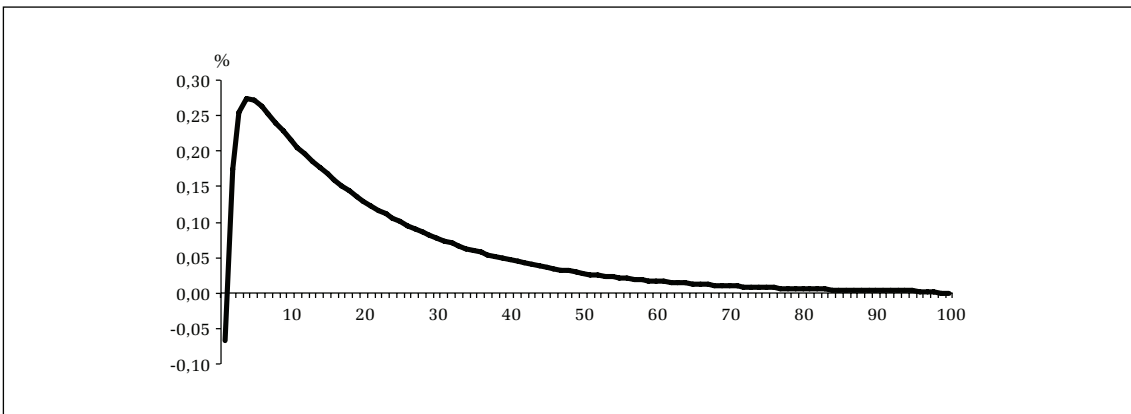
Wykres 10

Funkcja reakcji na impuls dla odsetka czasu poświęcanego działalności produkcyjnej w modelu Uzawy i Lucasa po wystąpieniu szoku w sektorze edukacyjnym



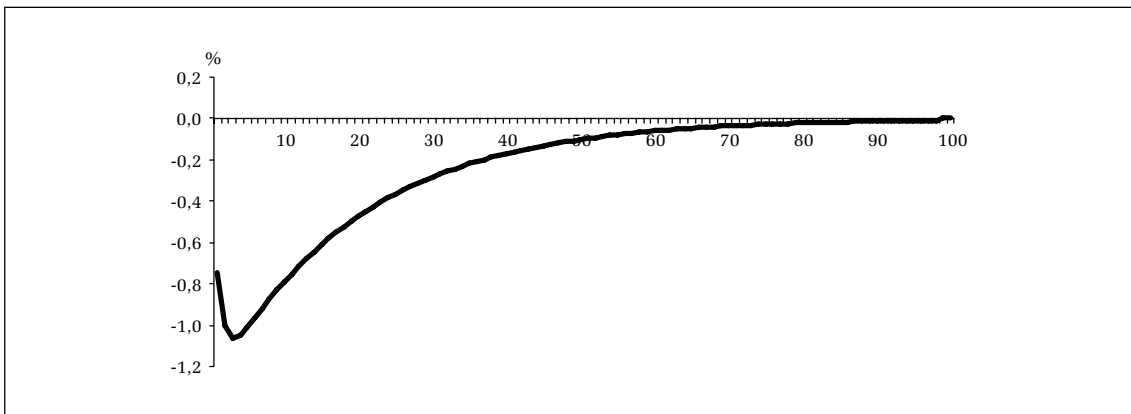
Wykres 11

Funkcja reakcji na impuls dla proporcji konsumpcji do kapitału fizycznego w modelu Uzawy i Lucasa po wystąpieniu szoku w sektorze edukacyjnym



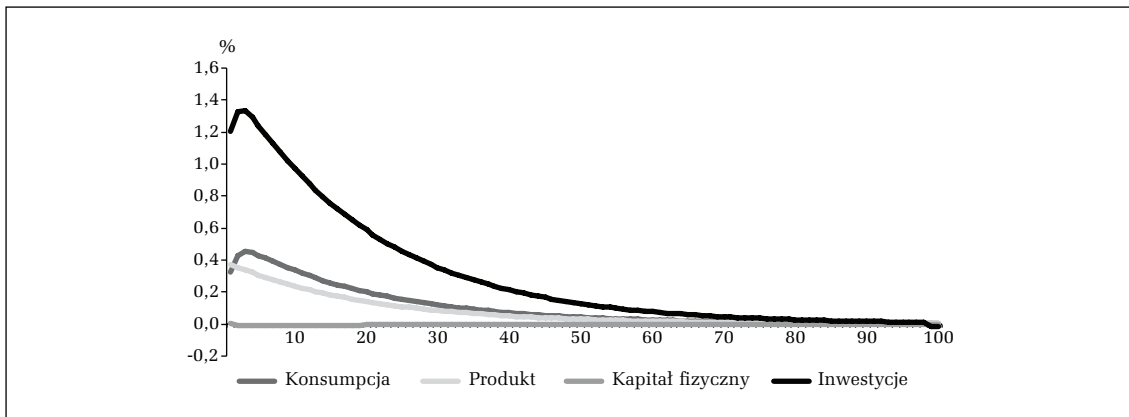
Wykres 12

Funkcja reakcji na impuls dla proporcji kapitału fizycznego do ludzkiego w modelu Uzawy i Lucasa po wystąpieniu szoku w sektorze edukacyjnym



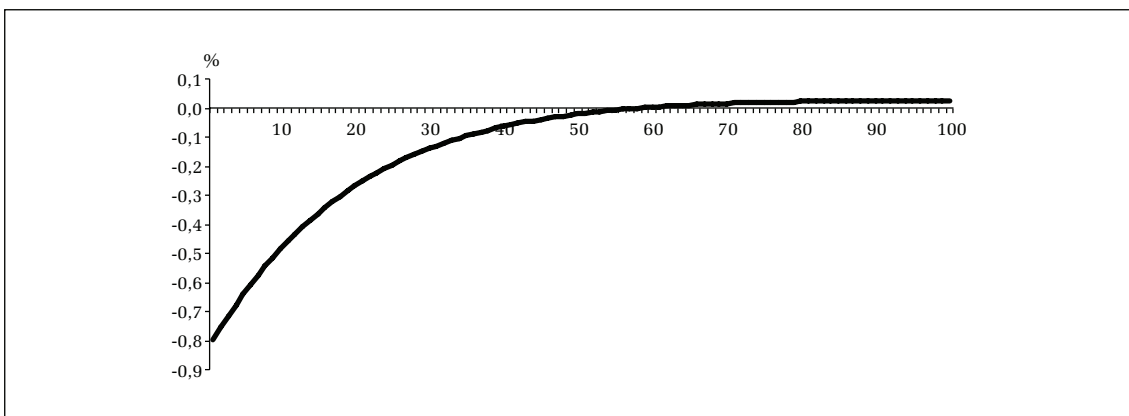
Wykres 13

Odchylenie zmiennych ekonomicznych od wartości w stanie ustalonym w modelu Uzawy i Lucasa po wystąpieniu szoku zwiększającego efektywność sektora edukacyjnego



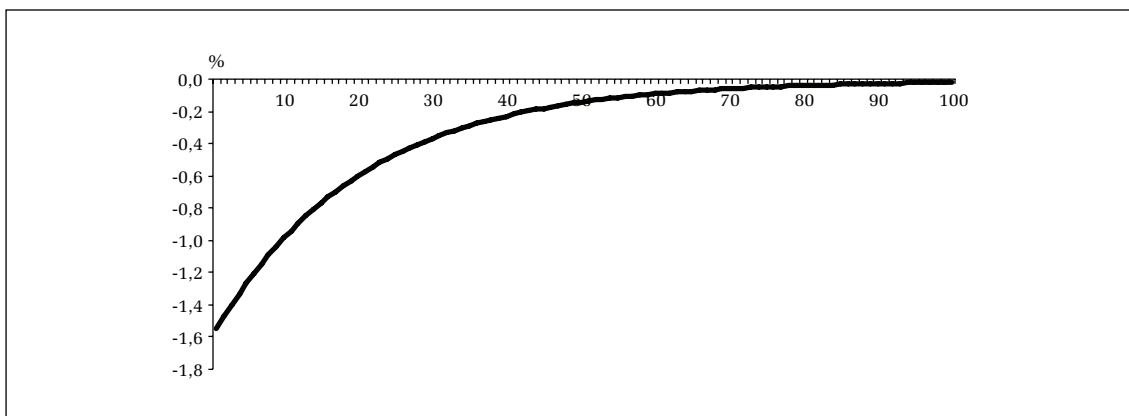
Wykres 14

Funkcja reakcji na impuls dla ilorazu funkcji kreującej wiedzę i poziomu technologii (zmienna w) w modelu Jonesa

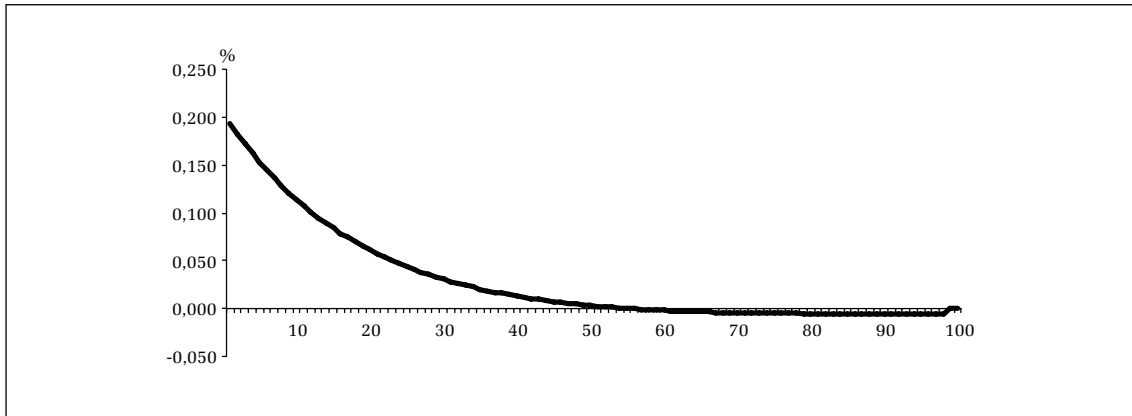


Wykres 15

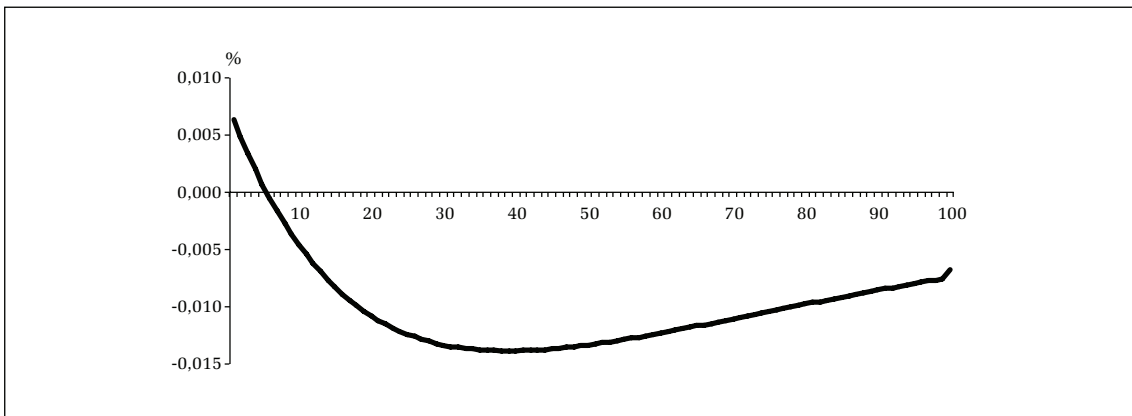
Funkcja reakcji na impuls dla odsetka czasu poświęcanego działalności w sektorze badań i rozwoju w modelu Jonesa



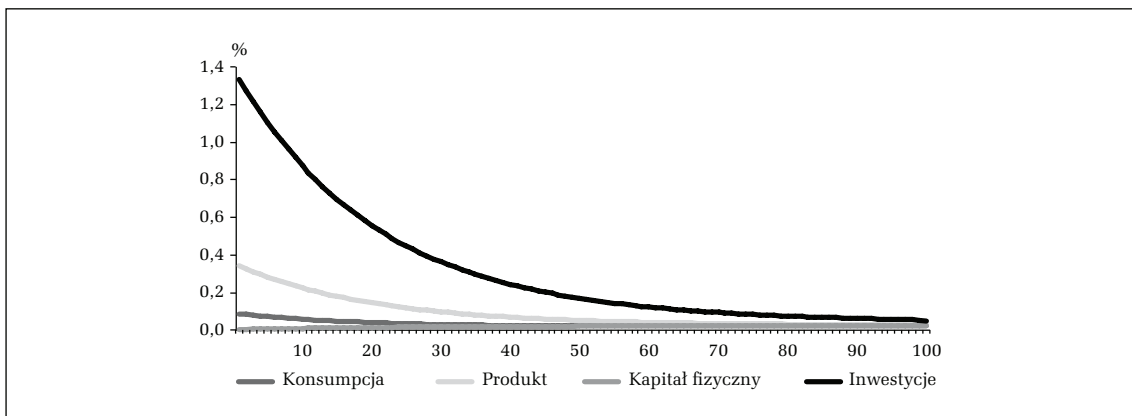
Wykres 16
Funkcja reakcji na impuls dla proporcji konsumpcji do kapitału fizycznego w modelu Jone



Wykres 17
Funkcja reakcji na impuls dla proporcji kapitału fizycznego do poziomu technologii w modelu Jonesa

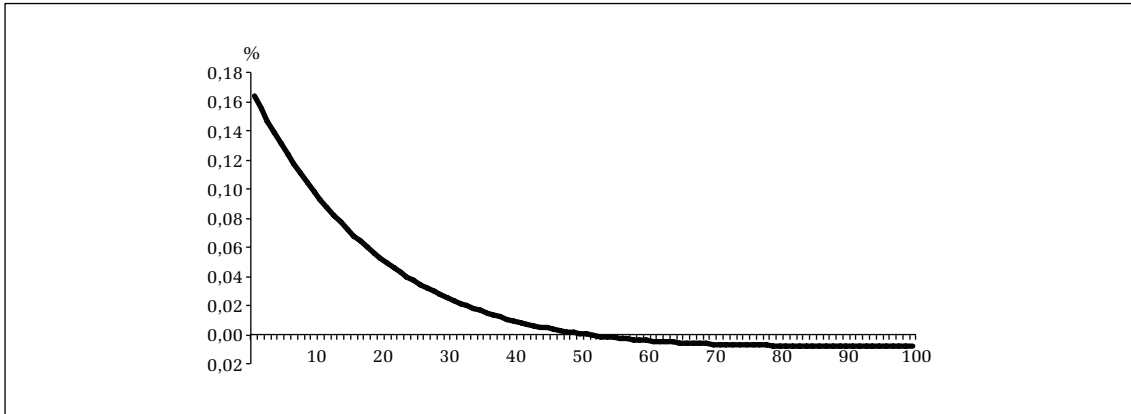


Wykres 18
Odchylenie zmiennych ekonomicznych od wartości w stanie ustalonym w modelu Jonesa po wystąpieniu szoku technologicznego



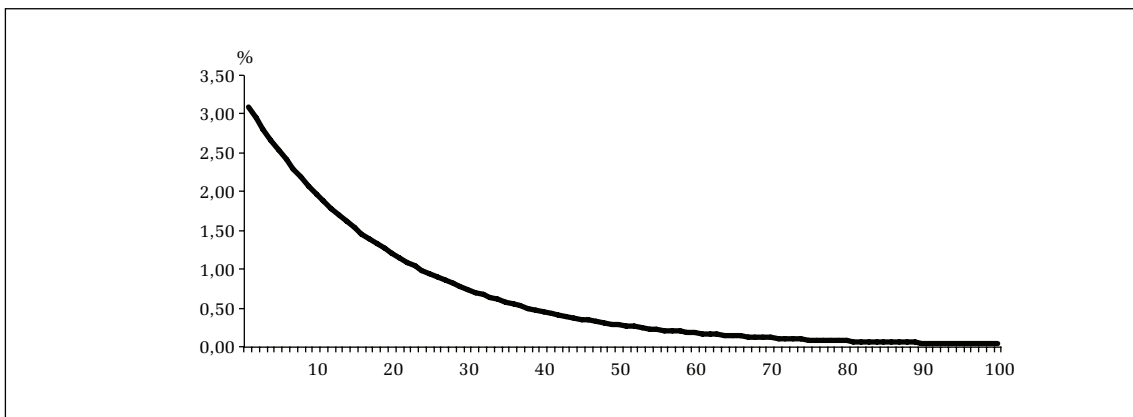
Wykres 19

Funkcja reakcji na impuls dla ilorazu funkcji kreującej wiedzę i poziomu technologii (zmienna w) w modelu Jonesa po wystąpieniu szoku w sektorze R+D



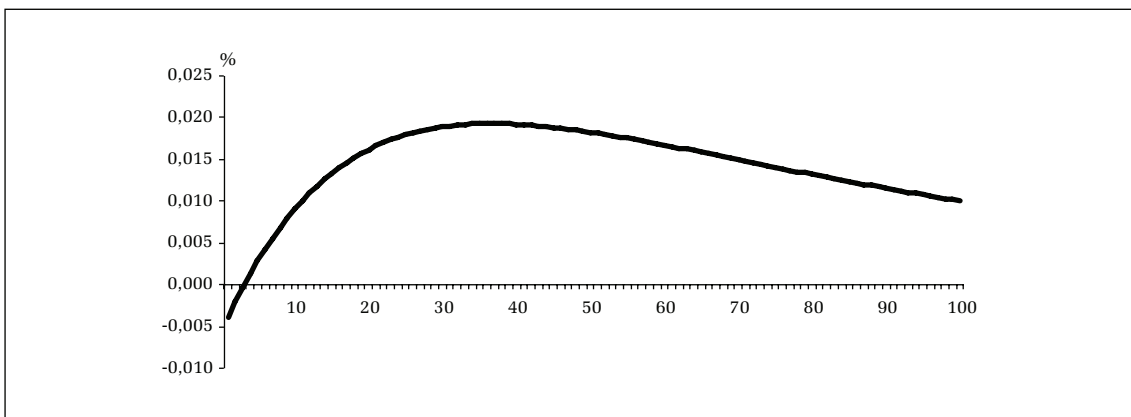
Wykres 20

Funkcja reakcji na impuls dla odsetka czasu poświęcanego działalności w sektorze badań i rozwoju w modelu Jonesa po wystąpieniu szoku w sektorze R+D



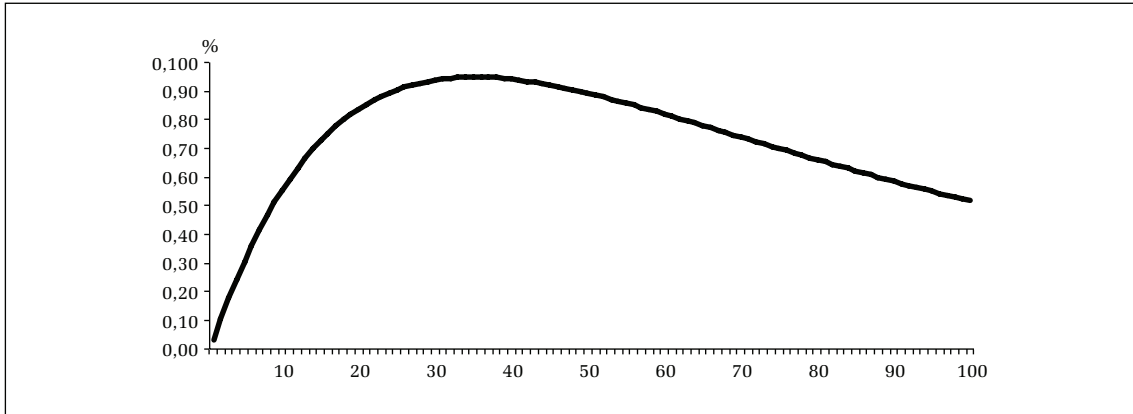
Wykres 21

Funkcja reakcji na impuls dla proporcji konsumpcji do kapitału fizycznego w modelu Jonesa po wystąpieniu szoku w sektorze R+D



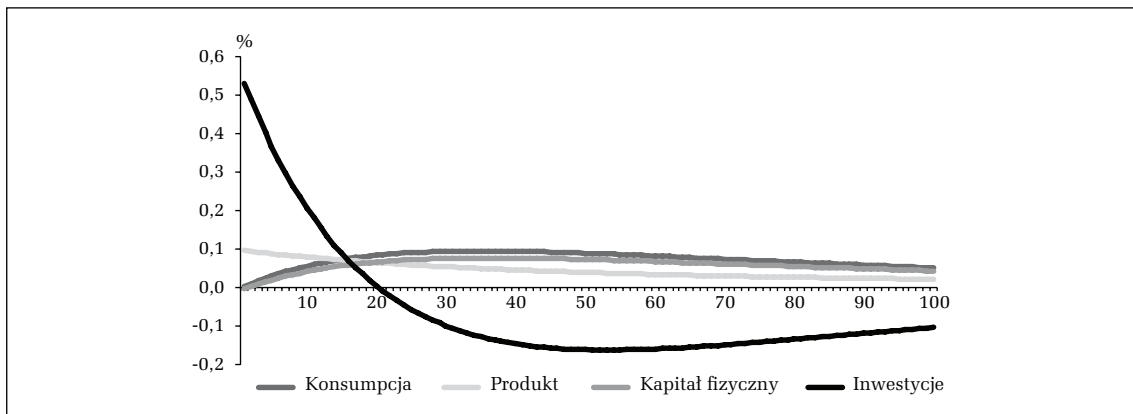
Wykres 22

Funkcja reakcji na impuls dla proporcji kapitału fizycznego do poziomu technologii w modelu Jonesa po wystąpieniu szoku w sektorze R+D



Wykres 23

Odchylenie zmiennych ekonomicznych od wartości w stanie ustalonym w modelu Jonesa po wystąpieniu szoku zwiększającego efektywność R+D



An investigation of the response of selected long-run growth models to stochastic shock

Abstract

The aim of this article is to include stochastic shocks in selected long-term growth models and investigate the direction and power of influence of stochastic shocks on the most important variables of these models. The scope of research includes model proposed by Ramsey and developed by Cass and Koopmans, Uzawa and Lucas endogenous growth model and Jones R&D semi-endogenous growth model. It will consider shock which increases TFP. Moreover the shock will be added in Jones model and Uzawa and Lucas model to increase the efficiency of process of respectively knowledge and human capital accumulation. The aim will be achieved in two steps. Firstly impulse reaction function on stochastic shock will be calculated for the key variables of all models. Then the autocorrelation of cycle component of the most important variables of each model will be compared with empirical observation for the United States.

Keywords: DSGE, endogenous growth, semi-endogenous growth