

Zastosowanie modelu MR-ARCH do szacowania VaR na rynku walutowym

Paweł Talar

Wstęp

W obecnych, niepewnych i niespokojnych czasach, kiedy wystąpienie nieoczekiwanych zmian rynkowych jest bardziej prawdopodobne niż niegdyś, powstała potrzeba, aby do analiz rynkowych stosować modele, które kładłyby większy nacisk na duże wahania notowań rynkowych, a z ich konstrukcji metodologicznej wynikałoby, że ekstremalne zdarzenia mogą występować częściej niż w standardowych rozkładach. Jednak na „klasycznym” rynku po okresie dużych wahań cenowych wartości bezwzględne rynkowych zwrotów utrzymują się przez pewien czas na niższym, stabilnym poziomie i w tym czasie ekstremalne odchylenia nie występują. Oznacza to, że znaczne wzrosty cen wymuszają w krótkim czasie znaczne ich spadki. Wynika więc z tego, że aby skonstruować dobry model, który spełniałby wyżej przedstawione oczekiwania, należy wziąć pod uwagę nie tylko występowanie ekstremalnych ruchów cen instrumentów pierwotnych notowanych na rynku. Należy również uwzględnić to, że te wahania są od siebie zależne (nie są niezależne). Widać więc od razu, że należy wykluczyć zastosowanie do analizy rozkładów prawdopodobieństwa, które zakładają niezależność badanej próbki.

Celem tego artykułu jest pokazanie takiego modelu, który byłby łatwy do stosowania i spełniał powyższe oczekiwania. Model ten będziemy mogli wykorzy-

stać do wyliczenia wartości VaR (*Value at Risk*). W literaturze stworzono i opisano wiele modeli, które kładą nacisk na autoregresyjną zależność zwrotów rynkowych od poprzednich obserwacji. Ponadto ponieważ analiza rynku wymusza zajmowanie się modelami, gdzie występują obserwacje odstające, dzięki nim można także generować zwroty rynkowe, których rozkład charakteryzuje się „grubymi ogonami”, czyli obserwacjami odstającymi. Są to m.in. modele typu ARMA. Jednak oprócz badania samej zależności między zwrotami ważne jest, aby zbadać też wariancję takich zwrotów oraz zależność takiej wariancji od wariancji zwrotów (bądź też kwadratów samych zwrotów) z poprzednich okresów. Istnieje wiele modeli służących m.in. do wyliczenia VaR, dzięki którym można modelować wariancję. Są to np. modele typu ARCH/GARCH, których w literaturze jest bardzo dużo i niekiedy bywają dość skomplikowane. Wariancja tych modeli jest zmienna i może być zależna od wariancji i zwrotów rynkowych występujących w poprzednich okresach. Okazuje się także, że modele tego typu są gruboogonowe. Istnieją ponadto metody, które w swoich założeniach szacują asymptotyczny rozkład prawdopodobieństwa, dzięki któremu można przybliżyć metodykę VaR do procedury *stress-testing* przy założeniu, że zwroty brane do analizy pochodzą z rozkładu gruboogonowego (przybliżenie do wartości ekstremalnych – *Extreme Value Approach*, EVA). Jednak może się zdarzyć, że wartości VaR osiągane za pomocą tej metody nie będą duże,

choć rozkład asymptotyczny jest dobrze dopasowany do zwrotów empirycznych.

W niniejszym artykule postaram się przedstawić metodę szybką w realizacji pod względem czasu potrzebnego do dokonania obliczeń przez komputer (model typu ARCH/GARCH). Dzięki niej będzie można opisywać i modelować wariancję w ujęciu zależności od poprzednich obserwacji i na tej podstawie generować szeregi czasowe zależne bezpośrednio od informacji historycznych. Ponadto, będzie ona dobrze obrazować efekt grubych ogonów, a wartości VaR będą przybliżać wartości otrzymane za pomocą procedury *stress-testing*.

Podstawy teoretyczne

Model ARCH (p) ($p \in \mathbb{N}$), dla którego wariancja jest zależna od historycznych zwrotów, przedstawiony jest za pomocą następujących formuł:

$$R_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots;$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i R_{t-i}^2.$$

Założenia

R_t – zwrot rynkowy ceny instrumentu finansowego w chwili t ,

$R_{(-p+1)}, \dots, R_0$ – są dane,

$p \geq 0, a_0, a_p > 0, a_1, \dots, a_{p-1} \geq 0$,

h_t – wariancja modelu w chwili t ,

zmiennie $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, 1)$ pochodzą z standardowego rozkładu normalnego i są niezależne od siebie.

Poniżej spróbuję nieco zmodyfikować ten model. Będzie się on charakteryzował tym, że w pewnych okresach zwroty mogą wyraźnie odstawać od średniej. Jednak poprzez zastosowanie pewnych zabiegów technicznych (o których wspomnę w dalszej części artykułu) zapobiegnie się temu, że przy dużej wartości początkowej (przy dużych bezwzględnych wartościach zwrotów) szereg ten nie będzie dążył do nieskończoności. Jest to tzw. model MR-ARCH (p, q) (*Modified Randomized-ARCH*). Jest on wprowadzony za pomocą następujących formuł:

$$R_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots;$$

$$h_t = \sum_{i=1}^p a_i \lambda_{t-i} R_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q c_i \eta_{t-i}.$$

Założenia

$p, q \in \mathbb{N}$,

$p \geq 0, a_p > 0, a_1, \dots, a_{p-1} \geq 0$,

$q \geq 1, c_q > 0, c_1, \dots, c_{q-1} \geq 0$,

$R_{(-p+1)}, \dots, R_0$ – są dane,

$\{\varepsilon_t\} \sim N(0, 1)$ są niezależne od siebie,

$\{\eta_t\}$ – zmiennie losowe niezależne od siebie z rozkładu przyjmującego jedynie wartości dodatnie,

$\{\lambda_t\}$ – zmiennie losowe niezależne od siebie z rozkładu przyjmującego wartości nieujemne;

wartość oczekiwana (średnia) – $E(\lambda_t) = r \in (0, 1)$,

$\{\varepsilon_t\}, \{\eta_t\}, \{\lambda_t\}$ są wzajemnie niezależne.

Widać, że wariancja h_t zależy od sumy iloczynów zmiennych losowych $\lambda_{t-1}, \dots, \lambda_{t-p}$ i kwadratów przeszłych obserwacji procesu oraz dodatkowo od zmiennych losowych $\eta_{t-1}, \dots, \eta_{t-q}$. Porównując wariancję h_t modeli ARCH i MR-ARCH, należy zauważyć, że wariancja modelu MR-ARCH została uzyskana na bazie wariancji modelu ARCH poprzez randomizację (ulośnienie) wszystkich parametrów a_i tego modelu, czyli poprzez zamianę parametru a_0 na zmienną η_t oraz poprzez modyfikację parametrów a_1, \dots, a_p i pomnożenie ich przez zmienną $\lambda_{t-1}, \dots, \lambda_{t-p}$. Stąd pochodzi nazwa modelu – zmodyfikowany randomizowany ARCH. Dzięki dodaniu czynnika losowego η_t uzyskuje się efekt losowości przy symulacji zwrotów, a zarazem można nadać zwrotom R_t pożądany rozkład prawdopodobieństwa. Jeśli np. czynnikiem losowym η_t będzie zmienna $\frac{1}{\gamma_t}$, gdzie γ_t pochodzi z opisanego w dalszej części artykułu rozkładu gamma, to zwroty R_t (przy założeniu, że $p = 0$ oraz $q = 1$) będą pochodzić z gruboogonowego rozkładu Cauchy'ego. Można więc, poprzez pewne zabiegi, przyjmować założenia o rozkładzie zwrotów R_t .

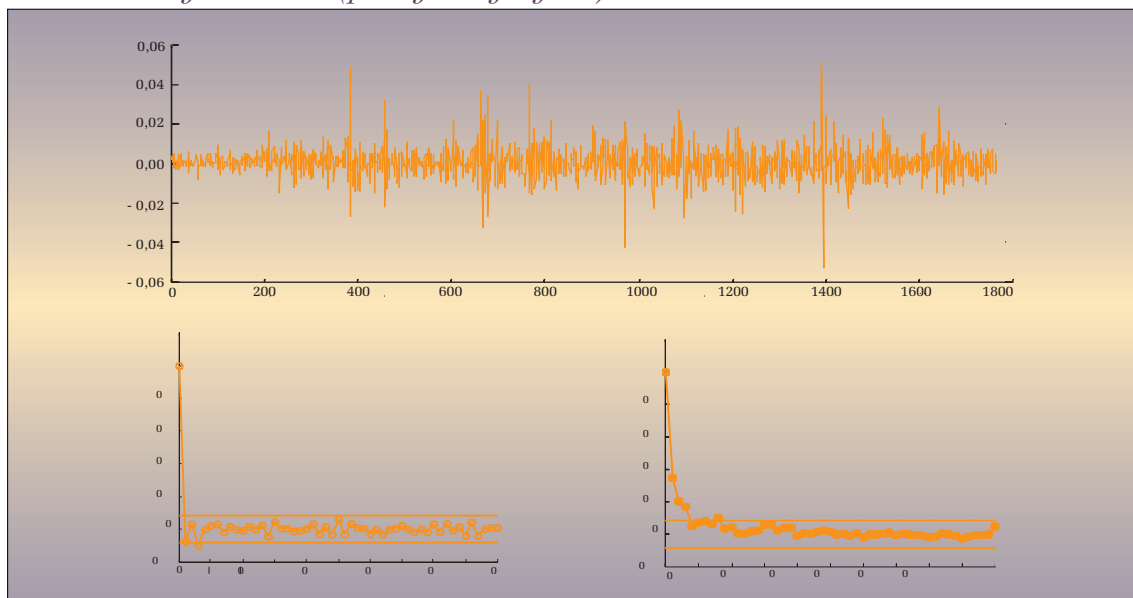
Ponadto, za pomocą dodatniej zmiennej losowej η_t , osiąga się efekt losowego, „grubego” ogona, natomiast „tłumienie” wariancji odbywa się poprzez zastosowanie zmiennej λ_t . Przy dużych, empirycznych wartościach R_t zmienna losowa λ_t spowoduje zmniejszenie wariancji h_t , jednak pozwoli na osiąganie jej dużych wartości. Ponadto, zmienna ta zapobiegnie temu, że $|R_t| \rightarrow \infty$, tzn. wartości bezwzględne zwrotów R_t nie będą dążyć do nieskończoności.

Przykłady

Poniżej zostanie przedstawione zastosowanie powyższej metody MR-ARCH w odniesieniu do rynku walutowego. Będziemy analizować dzienny kurs funta brytyjskiego (GBP/PLN)¹. Poniżej przedstawiono logarytmiczne zwroty tych kursów (różnice między logarytmami kursów walutowych z poszczególnych dni) w okresie od 1.10.1996 r. do 30.09.2003 r. (1.764 obserwacje) oraz wykresy autokorelacji (współzależności) zwrotów (wykres 1 – lewy dolny) i kwadratów tych zwrotów (wykres 1 – prawy dolny).

¹ Kurs walutowy GBP/PLN nie jest ustalany bezpośrednio na rynku. Rynek złotego istnieje tylko dla dolara i euro, natomiast inne kursy są ustalane przy wykorzystaniu faktycznych rynkowych kursów USD/PLN i EUR/PLN oraz odpowiednich kursów krzyżowych. Oznacza to, że nasze analizy nie są wykonywane w tym artykule *stricte* dla danych z rynku walutowego, do którego dane brane są bezpośrednio z rynku, ale dochodzą tutaj dodatkowe czynniki z innych rynków.

Wykres 1 Logarytmiczne zwroty kursu GBP/PLN w okresie od 1.10.1996 r. do 30.09.2003 r. (górny wykres) oraz wykresy autokorelacji (współzależności) zwrotów (lewy dolny wykres) i kwadratów tych zwrotów (prawy dolny wykres)



Należy zauważyć, iż zwroty charakteryzują się nie tylko dużą zmiennością, ale i dużą kurtozą, która jest miarą „grubości ogona”. W tym przypadku wynosi ona 11,05; tak więc zwroty pochodzą z rozkładu gruboogonowego. Na podstawie wykresu autokorelacji (ACF) dla kwadratów zwrotów widać, że istnieje między nimi krótkozasięgową korelację, ponieważ wartości autokorelacji wykraczają poza przedział ufności ograniczony poziomymi liniami. Na podstawie tego spostrzeżenia można przypuszczać, że zwroty te możemy modelować za pomocą gruboogonowych szeregów typu ARCH/GARCH/MR-ARCH. Z drugiej jednak strony, jeśli spojrzeć na wykres autokorelacji samych zwrotów, to widać że nie występuje między nimi żadna zależność. Dlatego wyklucza to zastosowanie w naszym przykładzie szeregów typu ARMA. Są one również gruboogonowe, jednak wykazują zależność pomiędzy samymi zwrotami, a nie wykazują jej pomiędzy kwadratami zwrotów. W tym przypadku uzasadnione jest użycie do wyliczenia VaR modelu MR-ARCH. Przez VaR rozumiemy tutaj maksymalną stratę z portfela złożonego z otwartych pozycji walutowych brutto, która z prawdopodobieństwem równym poziomowi ufności α nie zostanie przekroczona. Dla modelu MR-ARCH VaR przedstawia się następującym wzorem:

$$\text{VaR} = -z_{1-\alpha} \cdot S_0 \cdot \sqrt{h_0} \cdot \sqrt{T}$$

Założenia

- α – poziom ufności,
- $z_{1-\alpha}$ – dystrybuenta rozkładu $N(0, 1)$ na poziomie $1-\alpha$,
- T – okres utrzymywania portfela złożonego z in-

strumentów finansowych (w tym przypadku instrumentem jest funt brytyjski),

S_0 – cena instrumentu finansowego na dzień wyliczeń VaR,

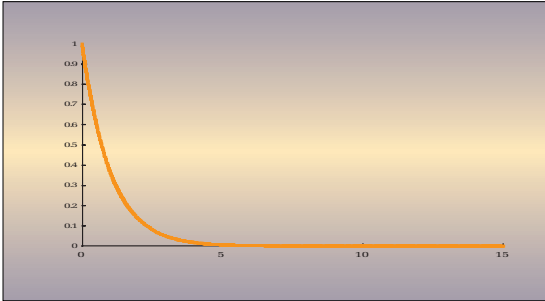
h_0 – wariancja h_t otrzymana na dzień wyliczeń VaR.

W niniejszym artykule analizujemy jedną konkretną walutę (funta brytyjskiego). W naszym przypadku S_0 oznacza więc otwartą pozycję walutową brutto złożoną z tej jednej waluty. Wyliczenia zostały dokonane dla pozycji długiej, kiedy jesteśmy w posiadaniu 1 GBP na dzień wyliczeń VaR w przeliczeniu po kursie średnim z tego dnia. W naszych analizach zakłada się, że $\alpha = 99\%$ ($z_{1-\alpha} = -2,33$) oraz $T = 1$. Trzeba jednak zauważyć, że otrzymany wynik VaR nie będzie za każdym razem jednakowy, gdyż w grę wchodzi czynniki losowe η_t oraz λ_t . Zakłada się tutaj, że zmienna losowa λ_t pochodzi z rozkładu dwumianowego o własnościach:

- prawdopodobieństwo $P(\lambda_t = 1) = r$,
- prawdopodobieństwo $P(\lambda_t = 0) = 1 - r$.

Pozostało nam jeszcze jedno dodatkowe założenie o rozkładzie h_t . W naszych symulacjach będziemy zakładać, że $\eta_i \sim \Gamma(1, 1) - \eta_i$ pochodzi z rozkładu gamma (1, 1). Jest to rozkład, który przyjmuje jedynie wartości dodatnie i powoduje występowanie w estymowanym rozkładzie obserwacji wyraźnie odstających od reszty badanej próbki. Gęstość rozkładu gamma (a, b) – $\Gamma(a, b)$ przedstawia się następującym wzorem:

$$f(x) = \frac{a^b x^{b-1} e^{-ax}}{\Gamma(b)} \text{ dla } x, a, b > 0 \text{ oraz } \Gamma(b) = \int_0^{\infty} x^{b-1} e^{-x} dx.$$

Wykres 2 Gęstość rozkładu $Exp(1)$ 

Dla $a = b = 1$ gęstość rozkładu $\Gamma(1, 1)$ jest identyczna z gęstością rozkładu $Exp(1)$ – wykładniczego z parametrem 1. Zachodzą wtedy następujące własności: wartość oczekiwana $E(\eta_i) = 1$ oraz wariancja $Var(\eta_i) = 1$. Gęstość tego rozkładu została przedstawiona na wykresie 2.

Ważnym przykładem (przypadkiem szczególnym) rozkładu gamma (a, b) jest rozkład chi-kwadrat $[\chi(n)]$, uzależniony od liczby stopni swobody n . Zachodzi zależność:

$$\chi(n) \sim \Gamma(1/2, n/2).$$

Znaczy to, że rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody jest to rozkład gamma (a, b) o parametrach $a = 1/2$ oraz $b = n/2$. Wykres 3 prezentuje gęstość rozkładu $\chi(n)$ dla $n = 4$:

Najpierw zostanie przeprowadzona analiza przypadku, gdy $\eta_i \sim \Gamma(1, 1)$. Następnie omówimy przypadek, gdy $\eta_i \sim \chi(4)$.

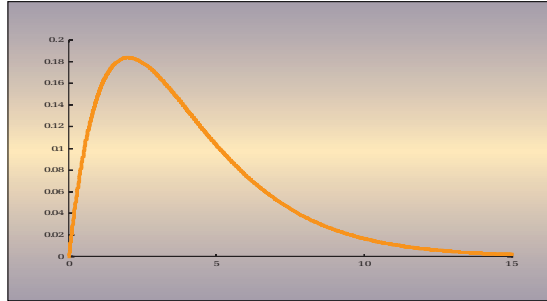
Procedura optymalizacyjna, którą stosujemy tutaj w odniesieniu do metody największej wiarygodności, doprowadziła nas do stwierdzenia, że najlepszym modelem opisującym analizowane zwroty jest MR-ARCH(1, 1). Do takiego stwierdzenia doszliśmy, wyliczając (maksymalizując) dla naszej próbki złożonej z $K = 1.764$ logarytmicznych zwrotów (obserwacji) funkcję największej wiarygodności L o następującej postaci:

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \ln(h_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \frac{R_i^2}{h_i}.$$

Aby wyznaczyć optymalny model MR-ARCH (p, q) , należy wyznaczyć takie wartości parametrów p i q , dla których funkcja L przyjmuje największą wartość. Po-

Tabela 1 Wartość funkcji największej wiarygodności oraz kryteriów Akaike (AIC) i Schwarz (SC)

	Wartości
Funkcja największej wiarygodności	3.194,1
AIC	-6.384,2
SC	-6.373,3

Wykres 3 Gęstość rozkładu $\chi(4)$ 

nadto, model można uznać za optymalny, jeżeli dla danych p i q wartości kryteriów Akaike i Schwarz przyjmują najmniejsze możliwe wartości. Kryteria Akaike (AIC) i Schwarz (SC) są przedstawione odpowiednio za pomocą następujących formuł:

$$AIC = -2\ln L + 2(p + q);$$

$$SC = -2\ln L + (p + q) \ln K.$$

Zarówno wartość funkcji największej wiarygodności, jak i wartości kryteriów AIC i SC potwierdzają, że wartości parametrów p i q , dla których model MR-ARCH (p, q) stanowi najlepsze dopasowanie do zwrotów kursowych GBP/PLN, to $p = q = 1$. Oznacza to, że model MR-ARCH(1,1) jest najlepszym modelem służącym do opisu analizowanych zwrotów. Wartości funkcji największej wiarygodności oraz wartości kryteriów AIC i SC zostały podane w tabeli 1. Mając już wyznaczoną wielkość modelu MR-ARCH (p, q) , możemy przystąpić do estymacji parametrów a_1 , c_1 i r , posługując się wzorem na funkcję L . Wartości tych parametrów oraz wyniki testów na ich statystyczną istotność zostały przedstawione w tabeli 2.

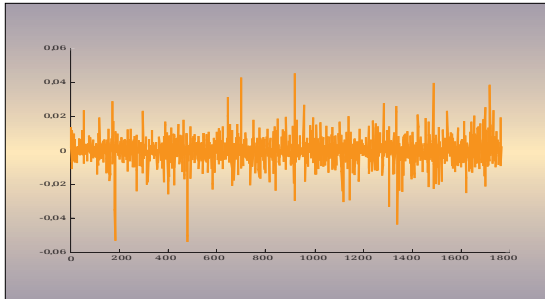
Na podstawie tabeli 2 należy wnioskować, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o istotności parametrów a_1 , c_1 oraz r na poziomie 5%, gdyż wszystkie wartości p -value dla tych parametrów są większe od 0,05. Oto jak przedstawia się wyliczona z modelu MR-ARCH(1,1) próbka zwrotów (1.764 obserwacje) dla oszacowanych parametrów.

Otrzymane wartości oszacowanych parametrów a_1 , c_1 i r powodują to, że analizowany szereg jest stacjonarny, czyli dla każdego τ i y :

Tabela 2 Wartości parametrów a_1 , c_1 i r dla modelu MR-ARCH(1, 1), oszacowane na bazie dziennych logarytmicznych zwrotów kursu walutowego GBP/PLN wraz z testami statystycznymi istotności tych parametrów w modelu

Parametry	Wartości parametrów	p -value
a_1	0,3652	(0,128)
c_1	0,0013	(0,058)
r	0,54	(0,087)

Wykres 4 Wyliczona z modelu MR-ARCH (1, 1) próbka zwrotów



$$P(R_t < y) = P(R_{t+\tau} < y).$$

Dla modelu MR-ARCH (1, 1) oznacza to także, iż zachodzą następujące własności dla skończonego drugiego i czwartego momentu analizowanego procesu:

$$\begin{aligned} E(R_t^2) &= E(R_{t+\tau}^2); \\ E(R_t^4) &= E(R_{t+\tau}^4). \end{aligned}$$

Wynika z tego, że aby szereg był stacjonarny, musi zachodzić następująca własność:

$$a_1 < \sqrt{\frac{1}{3r}}.$$

Na podstawie powyższej własności można stwierdzić, że dopasowany do zwrotów kursowych GBP/PLN szereg MR-ARCH (1,1) jest stacjonarny, gdyż:

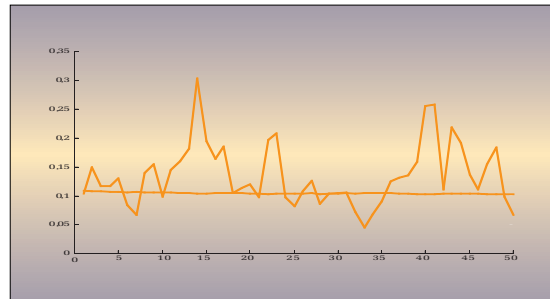
$$0,3652 < \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 0,54}} = 0,786.$$

Stacjonarność procesu zapobiega temu, że wartości bezwzględne zwrotów R_t będą dążyć do nieskończoności. Otrzymany rozkład ma grube ogony (odchylenie standardowe zwrotów wyliczonych z modelu MR-ARCH (1, 1) wynosi 0,13, natomiast kurtoza wynosi 11,14), ale zwroty do nieskończoności nie dążą. Jest to pożądane w przypadku szacowania VaR, kiedy mamy do czynienia z rozkładami gruboogonowymi. Wartości VaR z okresu 50 dni (od 22.07.2003 r. do 30.09.2003 r.) dla metody MR-ARCH (krzywa skokowa) i dla metody wariancji-kowariancji (krzywa wygładzona) zostały pokazane na wykresie 5:

Można więc wnioskować, że wartości VaR dla metody MR-ARCH są przeważnie większe (bardziej „ekstremalne”). Osiągane bezwzględne wartości zwrotów dla tej metody będą przez to większe niż wartości zwrotów otrzymywane klasycznymi metodami. Dzięki tej metodzie będzie można oszacować potencjalną wartość VaR, kiedy chcemy wiedzieć, co się stanie w przypadku ekstremalnych ruchów cen.

Aby potwierdzić dobre dopasowanie modelu MR-ARCH (1, 1) do badanej próbki, można przeanalizować residua (reszty)² W_t o następującej postaci:

Wykres 5 Wartości VaR z okresu 50 dni (od 22.07.2003 r. do 30.09.2003 r.) dla metody MR-ARCH (krzywa skokowa) i metody wariancji-kowariancji (krzywa wygładzona)



$$W_t = \frac{R_t - \bar{R}_t}{\sqrt{E(R_t - \bar{R}_t)^2}}.$$

Założenia

R_t - zwrot otrzymany za pomocą modelu MR-ARCH (1, 1),

R_t - zwrot empiryczny,

E - wartość oczekiwana (średnia).

Jeśli dopasowanie modelu do danych empirycznych ma być dobre, to residua W_t powinny być niezależne od siebie oraz powinny zachodzić następujące własności: wartość oczekiwana $E(W_t) = 0$ i wariancja $Var(W_t) = 1$. Na wykresie 6 pokazano wykresy residuów W_t (lewy wykres) oraz wykres autokorelacji ACF dla W_t (prawy wykres):

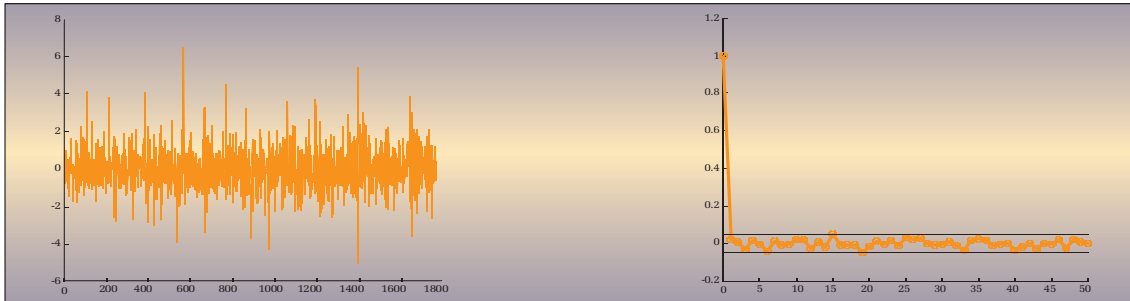
Należy stwierdzić, że warunki dobrego dopasowania modelu do zwrotów w odniesieniu do residuów zostały spełnione. Ich wartość oczekiwana wynosi $4 \cdot 10^{-6}$, natomiast wariancja wynosi 1,0005. Wartości funkcji ACF mieszczą się w 95-procentowych przedziałach ufności o następującej postaci:

$$\frac{1,96}{\sqrt{1764}}; \frac{1,96}{\sqrt{1764}}.$$

Poziome linie na wykresie oznaczają 95% przedziały ufności. Ponadto na potwierdzenie naszych wniosków w tabeli 3 zaprezentowane zostały wyniki testów na niezależność residuów. Są to testy Portman-teau, punktów zwrotnych, różnicy znaków oraz rangowy. Natomiast w tabeli 4 przedstawiono wartości statystyk Kołmogorowa (K) oraz Andersona-Darlinga (AD), dzięki którym można ocenić jakość dopasowania modelu do danych empirycznych. Przedstawiono je następującymi wzorami:

² W tym przypadku analizowane przez nas reszty nie są normalnymi resztami, które zwykle określać się jako różnice pomiędzy zwrotami wyliczonymi z modelu a odpowiadającymi im zwrotami empirycznymi. Każdą taką różnicę wystandaryzowaliśmy, dzieląc ją przez wartość oczekiwaną kwadratów różnic. We wzorze na residua pomijamy obciążenie estymatora wariancji, gdyż liczba analizowanych obserwacji jest znacząca (1.764) i nie będzie to miało dużego wpływu na przeprowadzone obliczenia.

Wykres 6 Wykresy reszduów W_t (lewy wykres) oraz wykres autokorelacji ACF dla W_t (prawy wykres)



$$K = \max_x K(x) = \max_x |F(x) - \bar{F}(x)|;$$

$$AD = \max_x AD(x) = \max_x \frac{|F(x) - \bar{F}(x)|}{\sqrt{F(x)(1 - F(x))}}$$

gdzie:

$F(x)$ – dystrybuanta empiryczna;

$\bar{F}(x)$ – dystrybuanta teoretyczna otrzymana za pomocą modelu MR-ARCH (1, 1).

Należy wspomnieć, że aby nie odrzucić testowanej hipotezy, p -value dla statystyki, która weryfikuje tę hipotezę, powinno być wyższe niż zadany poziom istotności. Jak widać z tabeli 3, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o niezależności reszduów W_t na poziomie istotności 5%, gdyż wszystkie wartości p -value dla we-

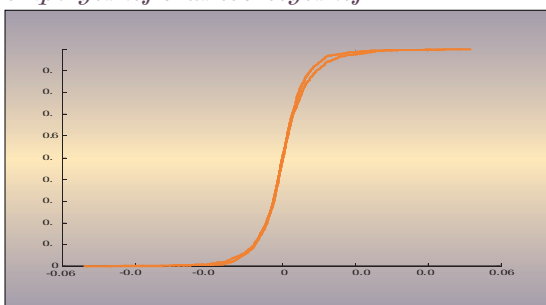
Tabela 3 Wyniki testów Portmanteau, punktów zwrotnych, różnicy znaków oraz rangowego

Test	Wartość statystyki testowej	p -value
Portmanteau	59,34	(0,83)
Punktów zwrotnych	1.164	(0,27)
Różnicy znaków	887	(0,67)
Rangowy	759.375	(0,07)

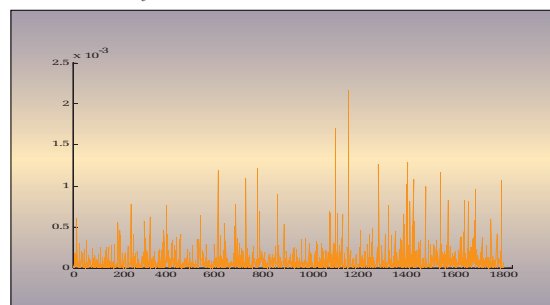
Tabela 4 Wartości statystyk Kołmogorowa oraz Andersona-Darlinga

Statystyka	Wartość statystyki
Kołmogorowa	0,056
Andersona-Darlinga	0,145

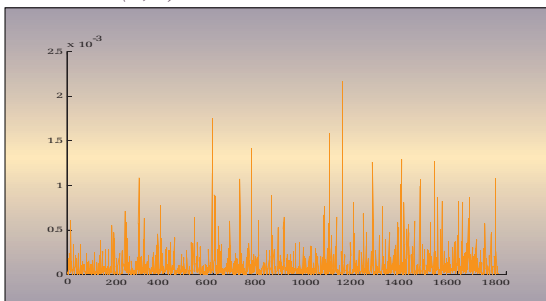
Wykres 7 Wykres dopasowania dystrybuant empirycznej oraz teoretycznej



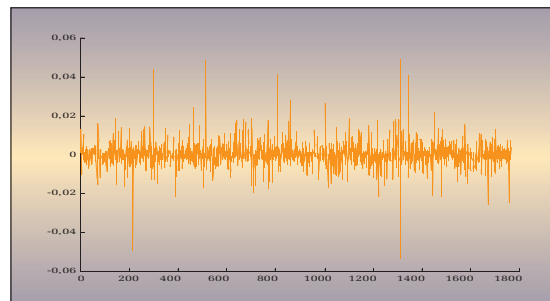
Wykres 8 Empiryczne zmienności h_t dla zwrotów R_t

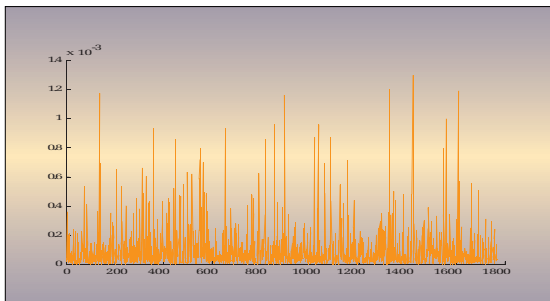


Wykres 9 Zmienności h_t wyliczone z modelu MR-ARCH(1, 1)



Wykres 10 Wyliczona z modelu MR-ARCH(1, 1) próbka zwrotów (1.764 obserwacje) dla $\eta_i \sim \chi(4)$



Wykres 11 Wyliczone z modelu MR-ARCH(1, 1) zmienności h_t dla $\eta_i \sim \chi(4)$.

ryfikowanych statystyk są większe niż 0,05. Ponadto, aby dopasowanie szacowanego modelu do empirycznych zwrotów było dobre, wartości wyliczonych statystyk Kołmogorowa oraz Andersona-Darlinga muszą być niższe niż ich wartości krytyczne. W naszym przypadku oszacowane wartości krytyczne dla tych statystyk wynoszą odpowiednio 0,077 oraz 1,345. Widać więc, że wartości otrzymanych statystyk są mniejsze niż wartości krytyczne. Z tego też względu należy stwierdzić, że dopasowanie modelu MR-ARCH (1, 1) do danych empirycznych jest bardzo dobre. Wykres 7 dopasowania dystrybuant empirycznej oraz teoretycznej potwierdza ten fakt.

Wykres 8 ilustruje, jak kształtują się empiryczne zmienności (wariancje) h_t .

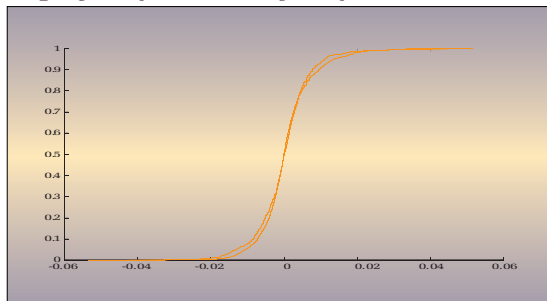
Wykres 9 obrazuje natomiast zmienność h_t wyliczone z modelu MR-ARCH (1, 1):

Na wykresie 10 przedstawiono, wyliczony z modelu MR-ARCH (1, 1), szereg 1.764 obserwacji dla $\eta_i \sim \chi(4)$, bazując na danych empirycznych, natomiast wykres 11 ilustruje wyliczone z modelu MR-ARCH (1,1) zmienności h_t dla $\eta_i \sim \chi(4)$:

W procesie dopasowywania współczynników modelu do danych empirycznych otrzymano wyniki zaprezentowane w tabeli 5.

Na podstawie tabeli 5 należy wnioskować, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o istotności parametrów a_1 , c_1 oraz r na poziomie 5%, gdyż wszystkie wartości p -value dla tych parametrów są większe od 0,05. Ponadto testy na statystyczną istotność różnic parametrów a_1 , c_1 oraz r w modelach MR-ARCH (1, 1) dla przypadków odpowiednio $\eta_i \sim \chi(4)$ oraz $\eta_i \sim \Gamma(1, 1)$

Wykres 12 Wykres dopasowania dystrybuant empirycznej oraz teoretycznej



pokazują, że dla parametrów a_1 i r nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o równości tych parametrów. Wartości testów na istotność różnic między tymi parametrami w modelach są bowiem większe niż 5%. Dla parametru c_1 różnica ta jest statystycznie istotna, gdyż $0,029 < 0,05$. Na podstawie oszacowanych parametrów a_1 , c_1 i r można stwierdzić, że dopasowany do zwrotów kursowych GBP/PLN szereg MR-ARCH (1,1) dla $\eta_i \sim \chi(4)$ jest stacjonarny, gdyż:

$$0,3043 < \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 0,6}} = 0,745$$

Gdy $\eta_i \sim \chi(4)$, to wartości bezwzględne zwrotów R_t i wartości wariancji h_t są przeważnie mniejsze, a ich rozkłady charakteryzują się natomiast mniej odstającymi obserwacjami (cieńszymi ogonami) niż w przypadku, gdy $\eta_i \sim \Gamma(1, 1)$. Otrzymany rozkład R_t ma grube ogony, jednak kurtoza zwrotów wyliczonych z modelu MR-ARCH (1, 1) dla przypadku $\eta_i \sim \chi(4)$, wynosząca 10,97, jest mniejsza od kurtozy dla przypadku $\eta_i \sim \Gamma(1,1)$. Na koniec sprawdźmy jeszcze, w jakim stopniu dystrybuanty – empiryczna oraz teoretyczna – są do siebie dopasowane (wykres 12).

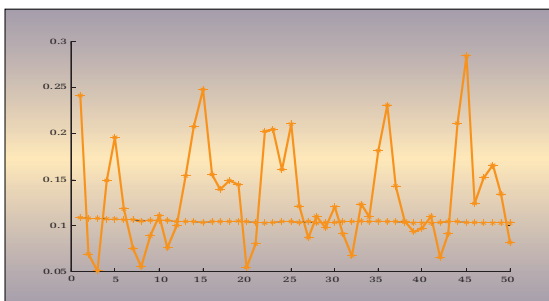
Należy jeszcze dodać, że VaR z okresu 50 dni (od 22.07.2003 r. do 30.09.2003 r.) dla metody MR-ARCH (krzywa skokowa – $\eta_i \sim \chi(4)$) jest w większości przypadków większy niż VaR z tego okresu dla metody wariancji-kowariancji (krzywa wygładzona) – por. wykres 13.

Można więc stwierdzić, że metoda MR-ARCH w tym wypadku również znajduje zastosowanie. Mimo że oszacowane zmienności h_t przyjmują niewiele mniejsze wartości niż w przypadku zmienności (wariancji) empirycznej

Tabela 5 Wartości parametrów a_1 , c_1 i r dla modelu MR-ARCH(1,1), $\eta_i \sim \chi(4)$, oszacowane na podstawie dziennych logarytmicznych zwrotów kursu walutowego GBP/PLN

Parametry	Wartości parametrów	p-value	Istotność różnic między parametrami modeli
a_1	0,3043	(0,106)	(0,166)
c_1	0,0008	(0,051)	(0,029)
r	0,6	(0,062)	(0,244)

Wykres 13 Wartości VaR z okresu 50 dni (od 22.07.2003 r. do 30.09.2003 r.) dla metody MR-ARCH (krzywa skokowa - przypadek, gdy $\eta_i \sim \chi(4)$) i dla metody wariancji-kowariancji (krzywa wygładzona)



nych, to otrzymane w wyniku symulacji zwroty są odstające od średniej w podobnym stopniu jak zwroty empiryczne i mają grube ogony. Wartości VaR, otrzymane w wyniku analizy danych i oszacowania parametrów modelu MR-ARCH (1,1) dla $\eta_i \sim \chi(4)$, są w przeważającej części większe niż wartości VaR dla tych samych danych, uzyskanych metodą wariancji-kowariancji.

Podsumowanie

Reasumując powyższe rozważania należy powiedzieć, że metodę MR-ARCH można stosować w przypadku, gdy ma się do czynienia z rozkładami „gruboogonowymi” oraz, gdy chce się oszacować VaR przy założeniu występowania ekstremalnych zwrotów w rozkładzie i oszacować ekstremalną wartość VaR. Jest to metoda prostsza w użyciu niż modelowanie np. za pomocą szeregu GARCH, gdyż tutaj wariancja h_t jest zależna tylko od obserwacji (zwrotów) z poprzednich okresów. W modelu GARCH wariancja ta dodatkowo zależy od przeszłych wariancji. Jednak wyniki uzyskane dzięki tej metodzie mogą być dokładniejsze z racji zastosowania losowych czynników η_t i λ_t , których parametry rozkładów można dowolnie modelować, tak aby uzyskać w miarę zadowalające wyniki. Poprzez dodanie losowości do modelu otrzymuje się pewnego rodzaju dowolność w analizie danych. Za pomocą metody MR-ARCH można generować zwroty charakteryzujące się grubymi ogonami oraz zależne od poprzednich zwrotów, co jest bliższe naturalnemu zachowaniu się cen instrumentów finansowych na rynku.

Literatura

1. P. Jorion: *Value at Risk. The New Benchmark for Controlling Market Risk*. New York 1997 McGraw-Hill.
2. M. Łach, A. Weron: *Skuteczność wybranych metod obliczania VaR dla danych finansowych z polskiego rynku*. „Rynek Terminowy” nr 9/2000, s. 133-137.
3. K. Jajuga, K. Kuziak, D. Papla: *Ryzyko wybranych instrumentów polskiego rynku finansowego – część I*. „Rynek Terminowy” nr 10/2000, s. 121-124.
4. J. Nowicka: *Analiza miar zależności dla szeregów czasowych z innowacjami a -stabilnymi*. Rozprawa doktorska. Politechnika Wroclawska 1998.
5. J. Nowicka-Zagrajek, R. Weron: *Modelowanie cen i zapotrzebowania na energię elektryczną: szeregi czasowe z szumem hiperbolicznym*. „Rynek Terminowy” nr 14/2001, s. 96-100.
6. P. Talar: *Teoria wartości ekstremalnych a stress-testing*. „Rynek Terminowy” nr 18/2002, s. 123-127.
7. P. Talar: *Porównanie metod do szacowania ryzyka rynkowego i kredytowego*. Praca magisterska. Politechnika Wroclawska 2000.
8. A. Weron, R. Weron: *Inżynieria finansowa*. Rozdział 9. Warszawa 1999 WNT.