

# Wykorzystanie modelu zmiennej sztywności krzywej stóp terminowych do przybliżania krzywej rynku pieniężnego

*Eugeniusz Gurazdowski*

W ostatnich kilkunastu latach obserwujemy znaczny wzrost liczby publikacji związanych z szeroko pojętym modelowaniem stóp procentowych<sup>1</sup>. W szczególności duża część tych prac omawia problematykę konstruowania krzywych dochodowości dla odpowiednich instrumentów finansowych. Określenie „krzywa dochodowości” związane było historycznie z rynkiem obligacji skarbowych. Jednak okazało się, że w podobny sposób można opisać rynki innych instrumentów finansowych. Wykorzystano tu przede wszystkim możliwość porównania atrakcyjności inwestycji w aktywa o różnych terminach zapadalności. Poniższy artykuł odnosi pojęcie „krzywej dochodowości” do struktury czasowej oprocentowania depozytów na rynku pieniężnym.

Celem tego opracowania jest przedstawienie sposobu przybliżania krzywej rynku pieniężnego z wykorzystaniem jednej z metod estymacji krzywej dochodowości. Wyboru techniki szacowania krzywej dochodowości, która posłuży do przybliżania stóp procentowych na rynku pieniężnym, dokonujemy na podstawie dwóch głównych przesłanek. Po pierwsze chcemy, aby nasz model teoretyczny w jak największym stopniu odzwierciedlał zachowanie stóp rynkowych, pozwalając na jego bezpośrednie wykorzystanie w praktycznie podejmowanych operacjach na rynku pieniężnym. Po drugie kładziemy nacisk na pozyskanie stabilnych stóp terminowych, co umożliwi nam, oczywiście w ograniczonym zakresie, badanie oczekiwań rynku co do zmian stóp krótkoterminowych. Ponieważ zakładamy,

że banki centralne, analizując to, co dzieje się na rynku pieniężnym, podejmują decyzje w zakresie prowadzonej polityki pieniężnej, możemy zakładać, że oczekiwania zawarte w krzywej rynku pieniężnego, w postaci stóp terminowych, mogą wskazywać na przewidywane zmiany polityki pieniężnej w najbliższych miesiącach.

Chcąc przedstawić powyższą problematykę w sposób usystematyzowany i zrozumiały, musimy na początek zaprezentować podstawowe wzory i przekształcenia matematyki finansowej związane ze stopą procentową oraz krzywą dochodowości, reprezentującą zbiór stóp/rentowności instrumentu o różnych terminach zapadalności, obserwowanych w określonym momencie czasowym.

## Wprowadzenie

Wychodząc od wyceny pojedynczej płatności dokonywanej w ściśle określonym momencie czasowym w przyszłości, otrzymujemy współczynniki dyskontowe zdefiniowane w następujący sposób:

$$d_j = (1 + r_j)^{-j} \quad (1)$$

gdzie:  $r_j$  - natychmiastowa stopa procentowa

Zbiór współczynników dla wcześniej zdefiniowanych momentów czasowych w przyszłości określamy mianem funkcji dyskontowej  $\delta(t_j)$ .

Związek między współczynnikiem dyskontowym, natychmiastową stopą procentową oraz stopą terminową  $f_j$  określa poniższy wzór:

<sup>1</sup> M.in.: J. Svensson (1994b), M. Fisher, D. Nychka, D. Zervos (1994), D.F. Waggoner (1997), G.S. Shea (1984), J.M. Steeley (1991), R.R. Bliss (1996), N. Anderson, J. Sleath (2001).

$$1/d_j = (1+r_j)^j = (1+f_1)(1+f_2)\dots(1+f_j) \quad (2)$$

Stopa terminowa to stopa jednookresowa charakteryzująca rentowność instrumentu w okresie  $j - 1$  i  $j$ . Jest to krańcowa stopa zwrotu w okresie  $j$ , podczas gdy stopa natychmiastowa opisuje raczej średnią stopę zwrotu w danym okresie. Ujmując to bardziej formalnie: wyliczone ze współczynników dyskontowych stopy terminowe (*implied forward rates*) reprezentują krańcowy zwrot z substytucji w portfelu  $j$ -okresowej obligacji zerokuponowej na obligację o okresie  $j - 1$ .

$$\frac{1/d_j}{1/d_{j-1}} = \frac{(1+f_1)(1+f_2)\dots(1+f_{j-1})(1+f_j)}{(1+f_1)(1+f_2)\dots(1+f_{j-1})} \quad (3)$$

$$\frac{d_{j-1}}{d_j} = (1+f_j) \Rightarrow f_j = \frac{d_{j-1} - d_j}{d_j}$$

Stąd:

$$f_j = \frac{-\Delta d_j}{d_j}$$

Powyższe wzory opisują zachowanie odpowiednich wielkości w sposób dyskretny (przy zastosowaniu kapitalizacji prostej). Przy założeniu ciągłej kapitalizacji z funkcji dyskontowej w prosty sposób możemy otrzymać odpowiedniki wcześniej podanych zależności. Równanie (3), opisujące stopę terminową dla kapitalizacji prostej, zastępujemy zależnością pokazującą krzywą chwilowej stopy terminowej  $p(t)$  (*instantaneous forward rate curve*):

$$\rho(t) = \frac{-\delta'(t)}{\delta(t)} \quad (4)$$

$\delta(t)$  to pochodna funkcji dyskontowej w punkcie  $t$ .

Bardziej interesująca dla nas może być jednak średnia stopa terminowa w zdefiniowanym okresie  $(t_1, t_2)$ :

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \rho(s) ds = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\delta'(s)}{\delta(s)} ds$$

Ponieważ stopa natychmiastowa  $\eta(t)$  dla płatności w momencie  $t$  w przyszłości jest średnią natychmiastową stopą terminową w okresie od dnia dzisiejszego ( $t_1 = 0$ ) do określonego momentu w przyszłości ( $t_2 = t$ ), to prawdą jest:

$$\eta(t) = f(0, t) \quad (6)$$

Dalej, podstawiając (5) do wzoru (6), otrzymujemy:

$$\eta(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \rho(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t -\frac{\delta'(s)}{\delta(s)} ds \quad (7)$$

Przy założeniu  $\delta(0) = 1$  struktura terminowa **natychniastowych stóp procentowych** (*term structure of interest rates*) jest dana wzorem:

$$\eta(t) = \frac{-\ln[\delta(t)]}{t} \quad (8)$$

## Metoda

### Wybór metody estymacji krzywej

Jak już wspomnieliśmy, warunkami determinującymi wybór modelu do przybliżania krzywej rynku pieniężnego są przede wszystkim:

- minimalizacja odchyłeń stóp teoretycznych od obserwowanych na rynku,
- stabilność stóp terminowych wyliczonych z estymowanej krzywej rynku pieniężnego.

W ostatnim czasie najczęściej stosuje się dwa typy modeli estymacji krzywej dochodowości, spełniające obydwa z przedstawionych wyżej założeń. Pierwszym z nich jest rozszerzony model Nelsona-Siegela zaproponowany przez Svenssona<sup>2</sup> w 1994 r. W przypadku drugiego możemy mówić o całej klasie modeli opartych na łączeniu funkcji przedziału (*spline models*). W naszym przypadku wykorzystamy model zaproponowany przez: M. Fishera, Nychka, Zervosa<sup>3</sup>, jednak w wersji zmodyfikowanej przez D.F. Waggonera<sup>4</sup>. Jest on nazywany **modelem o zmiennej sztywności krzywej forwardowej** (*Variable Roughness Penalty*).

Współczynniki modelu Svenssona są estymowane bezpośrednio z równania opisującego funkcję dyskontową:

$$\delta(m) = \exp \left\{ -m \left[ \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \right) \cdot \frac{\tau_1}{m} - \beta_2 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \right] + \beta_3 \left[ \frac{\tau_2}{m} - \left( \frac{\tau_2}{m} \right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \right] \right\} \quad (9)$$

Głównym celem jest jednak oszacowanie krzywej forwardowej, charakteryzującej się formą funkcyjną zakładającą dużą elastyczność przyjmowanych kształtów. Postać analityczna rozważanej krzywej jest następująca:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \left[ \left( \frac{m}{\tau_1} \right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \right] + \beta_3 \left[ \left( \frac{m}{\tau_2} \right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \right] \quad (10)$$

Aczkolwiek dodatkowy składnik w postaci parametrów  $\beta_2$  i  $\tau_2$  i zwiększył możliwości wygięć obserwowanych na estymowanej krzywej, to nadal w krótkim końcu model Svenssona nie jest wystarczająco elastyczny. W szczególności dla rynku polskiego, który charakteryzuje się wysoką zmiennością stawek najkrótszych (WIBOR O/N), wysoka elastyczność zastosowanego modelu nabiera dużego znaczenia. Dodatkowo

<sup>2</sup> L. Svensson (1994b).

<sup>3</sup> M. Fisher, D. Nychka, D. Zervos (1994).

<sup>4</sup> D.F. Waggoner (1997).

niewielka liczba obserwowanych punktów nie wystarczy do osiągnięcia odpowiedniego zakrzywienia przez estymowaną krzywą. Zasadniczo wcześniej wymieniona właściwość modelu Svenssona (asymptotyczna zbieżność długiego końca) jest wysoce pożądana w analizie rynku kapitałowego (gładki, stabilny przebieg krzywej stóp dochodowości), jednak również tutaj mamy do czynienia ze znacznymi niedokładnościami wyceny papierów o bardzo krótkim okresie do wykupu (przede wszystkim poniżej roku). Włączenie do zbioru danych wejściowych cen bonów skarbowych nie poprawia zachowania krótkiego końca krzywej. Możemy nawet zauważyć pogorszenie się dopasowania modelu w postaci wyższej sumy kwadratów reszt ze względu na znaczną różnicę dochodowości bonów oraz obligacji o podobnym okresie do wykupu. Z tego względu modele oparte na łączeniu funkcji przedziałami, reagujące bardziej elastycznie na zmiany kształtu krzywej stóp dochodowości, wydają się odpowiedniejsze do zastosowania na rynku pieniężnym. Jednak i w tym przypadku dopasowanie do wartości obserwowanych będzie w dużym stopniu determinowane przez liczbę dostępnych punktów na rynku.

#### Model o zmiennej sztywności krzywej stóp terminowych

Istota metody sprowadza się do przybliżania szukanych wartości lub tworzenia całej krzywej poprzez łączenie obserwowanych w rzeczywistości punktów krzywymi. Z kolei na potrzebne do tego procesu krzywe, w zależności od zaawansowania wykorzystywanego aparatu matematycznego, składają się spline'y liniowe (*linear splines*), sześciennicze (*cubic splines*), B-spline'y (*B-splines*) oraz wielomiany (zwykle, wykorzystujące funkcje eksponencjalne) i funkcje złożone, tzn. eksponencjalne lub logarytmiczne, zawierające w swojej dziedzinie różnie zdefiniowane wielomiany (*polynomial, exponential splines*).

Model o zmiennej sztywności krzywej stóp terminowych jest przykładem najbardziej dotychczas zaawansowanego wykorzystania techniki spline'ów w analizie zachowania dochodowości instrumentów finansowych. Jest on oparty na B-spline'ach, które wykazują cechy nieobserwowane w pozostałych typach modeli. Najważniejszą z nich, przesądzającą o wysokiej użyteczności B-spline'ów w zastosowaniach ekonometrycznych, jest brak współliniowości budowanych na ich podstawie zmiennych. Powyższą własność zaobserwowali G.S. Shea(1984) oraz J.M. Steeley (1991)<sup>6</sup>. Przy wcześniejszych funkcjach bazowych, stosowanych do tworzenia spline'ów, dochodziło do wcześniejszej wspomnianej zależności liniowej w macierzy zmiennych niezależnych. W konsekwen-

cji skutkowało to obciążonymi oszacowaniami współczynników modelu przy użyciu MNK lub wręcz uniemożliwiało ich estymację.

#### Generowanie funkcji bazowych (B-spline'ów)

W celu otrzymania B-spline'ów najczęściej stosuje się wzór rekurencyjny zaproponowany przez Powella w 1981 r.<sup>7</sup>:

$$B_p^g(m) = \frac{(m - m_p)B_p^{g-1}(m) + (m_{p+g+1} - m)B_{p+1}^{g-1}(m)}{(m_{p+g+1} - m_p)}, \quad \bigwedge_{m \in R} \quad (11)$$

gdzie:

$$B_p^1(m) = \begin{cases} 1, & m_p \leq m \leq m_{p+1} \\ 0, & \text{wpp} \end{cases}$$

$g$  - rząd spline'u,

$p$  - oznacza, że spline jest niezerowy tylko w przedziale  $(m_p, m_{p+g+1})$ .

W celu osiągnięcia przebiegu przybliżanej krzywej o odpowiedniej gładkości oraz elastyczności, należy wykorzystać spline'y co najmniej trzeciego stopnia. W naszym przypadku wystarczy zastosowanie spline'u czwartego stopnia (por. wykres 1).

#### Estymacja

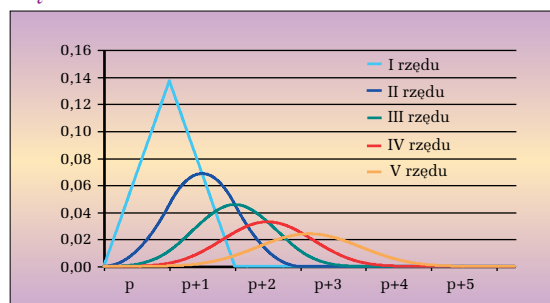
W celu zastosowania modelu o zmiennej sztywności krzywej stóp terminowych do przybliżania krzywej rynku pieniężnego musimy przekształcić obserwowane na rynku stopy krótkoterminowe w teoretyczne krótkoterminowe papiery zerokuponowe. Przyjmując nominalną wartość tych instrumentów na poziomie 1000 jednostek, wyceniamy je na chwilę obecną, dyskontując współczynnikami otrzymanymi ze wzoru (1).

$$p_i = 1000 \cdot \delta(f, t) \quad (12)$$

Ponieważ oprócz minimalizacji sumy kwadratów odchyień interesuje nas również stabilne zachowanie

<sup>7</sup> M.J.D. Powell (1981).

#### Wykres 1 Kształt B-spline'a w zależności od rzędu



<sup>5</sup> G.S. Shea (1984), s. 253-269.

<sup>6</sup> J.M. Steeley (1991), s. 512-529

stóp forwardowych wyliczonych z oszacowanej funkcji dyskontowej, funkcja celu optymalizacji wygląda następująco:

$$\min_{\beta} \left\{ \left[ (P - \Pi(\beta))^T (P - \Pi(\beta)) \right] + \int_0^T \lambda(s) [f''(s)]^2 ds \right\} \quad (13)$$

gdzie:

$P$  - wektor cen teoretycznych papierów wyliczony z obserwowanych stóp rynkowych,

$\Pi(\beta)$  - ceny teoretyczne wyliczone z modelu.

W regresji spline'owej liczba parametrów jest determinowana przez liczbę punktów węzłowych (zdefiniowaną przez nas z góry). Zarówno ich zbyt mała, jak i duża liczba może prowadzić do błędnych oszacowań. Ponieważ naszym celem jest jak najwierniejsze oddanie kształtu obserwowanej krzywej rynkowej, decydujemy się na większą liczbę węzłów, ale musimy zastosować karę w celu minimalizowania oscylacji w estymowanej funkcji dyskontowej. Rolę tej kary odgrywa w przedstawionym wyżej wzorze drugi składnik minimalizowanej sumy.

Funkcja  $\lambda(s)$  w powyższym wzorze odgrywa rolę czynnika potęgującego wpływ nakładanej kary na kształt krzywej estymowanej. Im wyższa wartość bezwzględna tejże funkcji, tym mniej oscylacji wykazuje szukana krzywa forwardowa. Poprzez skonstruowanie odpowiedniej funkcji  $\lambda(s)$  możemy zatem uzyskać pożądane właściwości krzywej stóp natychmiastowych i terminowych. Niskie wartości parametru w krótkim końcu krzywej mogą umożliwić łatwą adaptację częstych i znacznych zmian stopy O/N. Dla stóp od jednego miesiąca możemy natomiast nałożyć zdecydowanie większą karę w celu uzyskania stabilnego przebiegu stóp terminowych (jedno z naszych założeń). D.F. Waggoner, kierując się takimi samymi przesłankami, zdefiniował funkcję  $\lambda(s)$  następująco:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0,1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 < t \leq 10 \\ 100000 & 10 \leq t \end{cases} \quad (14)$$

gdzie  $t$  oznacza liczbę lat.

W naszym przypadku poziom kary będzie pod względem wartości odpowiadał ujęciu zaproponowanemu powyżej, jednak ze względu na zastosowanie modelu na odmiennym rynku (rynku pieniężnym), modyfikujemy przedziały odpowiadające danemu poziomowi funkcji. Ostatecznie wykorzystywane przez nas ograniczenie elastyczności estymowanej krzywej przyjęło postać:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0,1 & 0 \leq t \leq 30 \\ 100 & 30 < t \leq 180 \\ 100000 & 180 \leq t \end{cases} \quad (15)$$

gdzie:  $t$  - liczba dni.

Stopa procentowa rynku pieniężnego charakteryzuje się zapadalnością od 1 do 360 dni, ale przeliczamy ją na konwencję 365 dni (stąd taka definicja  $t$ ).

W literaturze spotykamy się również z przedstawieniem funkcji  $\lambda(s)$  jako parametru o ustalonej wartości. Poziom tej wartości możemy przyjąć lub otrzymać z kryterium optymalizacyjnego zwanego *Generalized Cross Validation*, którym nie będziemy się zajmować w niniejszym artykule<sup>8</sup>.

Krzywa stóp terminowych, przybliżana za pomocą B-spline'ów, ma postać:

$$f(t, \beta) = \sum_{k=1}^{p+g+1} \beta_k \phi_k(t) = \phi(t) \beta \quad (16)$$

gdzie  $\phi_k(t)$  w naszym przypadku to *spline* IV-rzędu dla danego węzła  $k$ .

Podstawiając (16) do wzoru (8), otrzymujemy:

$$\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t f(s) ds\right) = \exp\left(-\sum_i \beta_i \Phi_i(s) \Big|_0^t\right) \quad (17)$$

Ponieważ funkcja celu opisana równaniem (13) jest zdecydowanie nieliniowa, wykorzystujemy do jej minimalizacji metodę NMNK (nieliniową metodę najmniejszych kwadratów).

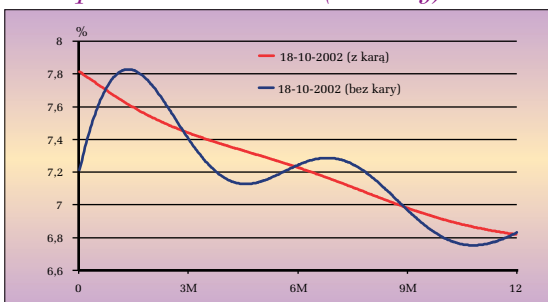
### Wyniki

Teoretyczna krzywa dla wybranego dnia (sesji) oszacowana wyłącznie przy warunku minimalizacji sumy kwadratów reszt charakteryzuje się wysoką dokładnością dla wartości obserwowanych na rynku. Jednak między nimi występują bardzo duże oscylacje krzywej, negujące jej przydatność w zastosowaniach praktycznych. Właśnie po to, by usunąć te niepożądane własności modeli spline'owych, do funkcji celu, będącej przedmiotem optymalizacji, wprowadzono drugi składnik, nakładający ograniczenia na zmiany „prędkości” estymowanej krzywej. Poniżej przedstawiamy krzywe stóp natychmiastowych oraz terminowych (z nałożoną karą i bez niej) wyliczone na danych z 30 sierpnia 2002 r.

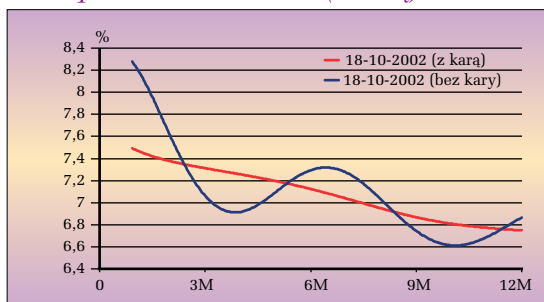
Dopasowanie modelowanej krzywej do danych rzeczywistych, mierzone za pomocą sumy kwadratów reszt, jest niższe dla minimalizacji przeprowadzanej

<sup>8</sup> Powyższą problematykę prezentują wcześniej wspomniane artykuły D.F. Waggonera oraz M. Fishera.

Wykres 2 Krzywe stóp rynku pieniężnego na 18 października 2002 r. (bez kary)



Wykres 3 Krzywe stóp rynku pieniężnego na 18 października 2002 r. (z karą)



bez zastosowania kary. Należało się jednak spodziewać, że chcąc uzyskać gładki przebieg stóp terminowych, zmuszeni będziemy zgodzić się na gorsze dopasowanie krzywej do obserwowanych punktów.

Dla NMNK podstawowym wskaźnikiem dopasowania modelu do rzeczywistości jest:

$$RMSE = \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right)$$

Chociaż dla NMNK przedział przyjmowanych wartości nie zawiera się między zerem a jedynką, jednak powyższy współczynnik nadal pozostaje użyteczną miarą dopasowania.

Model estymowany bez uwzględnienia kary charakteryzował się sumą kwadratów reszt na poziomie 0,0016, podczas gdy po nałożeniu ograniczeń na kształt krzywej stóp forwardowych suma kwadratów reszt wzrosła do 0,031 (krzywa z 18 października). Biorąc pod uwagę dokonaną wymianę między dopasowaniem do rzeczywistości a stabilnym przebiegiem funkcji stóp terminowych, niewielka strata dopasowania to tani sposób uzyskania praktycznych korzyści płynących z wygładzonego przebiegu stóp terminowych.

## Podsumowanie

Zasadniczo model bardzo dobrze odzwierciedla to, co działo się w rzeczywistości. Średni poziom sumy kwadratów reszt obliczony dla 470 wyliczonych krzywych wyniósł 0,133. Ograniczeniem w naszym przypadku jest fakt istnienia krótkiego szeregu WIBOR 12M, bowiem stopę tę NBP kwotuje dopiero od początku 2001 r. Oczywiście można wydłużyć szereg wcześniej wspomnianej stopy na podstawie kwotowań brokerskich, jednak wydaje się to całkowicie zbędne, jeżeli uwzględnimy poziom dopasowania modelu do danych rzeczywistych w ciągu prawie 2 lat (krzywe szacowano w okresie od 2 stycznia 2001 do 18 października 2002 r.).

Brak dopasowania do stopy najkrótszej (O/N) budzi pewne wątpliwości, jednak - jak wcześniej wskazywaliśmy - niewielka liczba dostępnych punktów z rynku nie mogła skutkować poważnymi wygięciami krzywej. Poza tym, naszym zadaniem nie jest modelowanie zmian stopy O/N, lecz możliwie dokładne oddanie tendencji panującej na rynku stóp krótkich. Biorąc pod uwagę osiągnięte wyniki, możemy stwierdzić, że krzywe rynku pieniężnego estymowane przy wykorzystaniu techniki B-spline'ów okazały się wystarczającym narzędziem włączenia zmian zachodzących w strukturze czasowej stóp rynku pieniężnego.

## Bibliografia

1. N. Anderson, J. Sleath (2001): *New Estimates of the UK real and nominal yield curves*. Bank of England. Working Paper.
2. M. Fisher, D. Nychka, D. Zervos (1994): *Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines*. Federal Reserve Bank of Washington. Working Paper.
3. P. Lancaster, K. Salkauskas (1986): *Curve and surface fitting: an introduction*. London Academic Press.
4. J.H. McCulloch (1971): *Measuring the term structure of interest rates*. "Journal of Business", vol. 44, s. 19-31.
5. M.J.D. Powell (1981): *Approximation theory and methods*. Cambridge University Press.
6. G.S. Shea (1984): *Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: equilibrium models and spline approximation*. "Journal of Financial and Quantitative Analysis", 19.
7. J.M. Steeley (1991): *Estimating the gilt-edged term structure: basis splines and confidence intervals*. "Journal of Business, Finance and Accounting", 18(4) June.
8. L. Svensson (1994b): *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. IMF Working Paper No. 114, September.
9. D.F. Waggoner (1997): *Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices* Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper No. 97-10, November.